DU MÊME AUTEUR :

COURS DE PHYSIQUE

CONFORME AUX PROGRAMMES

DES CERTIFICATS ET DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

1er Fascicule. — **Mécanique physique**. Un vol. in-8°, br. . . . . . 6 fr. 50
2e — — **Thermodynamique. Théorie des ions.** Un vol. in-8°, br. 7 fr. »
3e — — **Électricité et Magnétisme**. Un vol. in-8°, br. . . . 12 fr. »
4e — — **Optique. Étude des instruments.** Un vol. in-8°, br. 13 fr. »
5e — — **Électroptique**. Un vol. in-8°, br. . . . . 14 fr. »
6e — — **Étude des symétries**. Un vol. in-8°, br. . . . . 14 fr. »

Inspiré par des principes pédagogiques vraiment nouveaux et par une conception originale de l'enseignement des Sciences physiques, ce cours, — le premier de ce genre, — s'adresse non seulement aux professeurs et étudiants, mais encore à tous ceux qui veulent approfondir la physique.

Mécanique et physique (manuel du Baccalauréat). Exposé systématique, simple et bien ordonné, des faits essentiels, in-18, br. . . . . . . 6 fr.
Toile. . . . . 7 fr.

AVEC LA COLLABORATION DE L. BRIZARD
Professeur au Lycée Janson de Sailly.

Manuel d'électricité théorique et pratique, in-18, br. . . . . 3 fr. 25
Toile. . . . . . 4 fr.

COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE ET EXPÉRIMENTALE

SPÉCIALEMENT ÉCRIT POUR LES PHYSICIENS ET LES INGÉNIEURS
CONFORME AU PROGRAMME DU CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR
H. BOUASSE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT

Bicyclette.

575. Conditions géométriques du mouvement (Bourlet). — Nous appellerons *plan moyen* le plan de symétrie du cadre ; c'est aussi le plan de symétrie de la roue arrière. Les points A et B (fig. 406) sont les points les plus bas des roues arrière et avant, points de contact avec le sol. Nous admettrons que le plan moyen dont la trace sur le sol est MA passe par le point B, *quelle que soit l'inclinaison du cadre et celle de la roue avant sur le cadre ;* proposition très suffisamment exacte, au moins avec la construction ordinaire des bicyclettes.

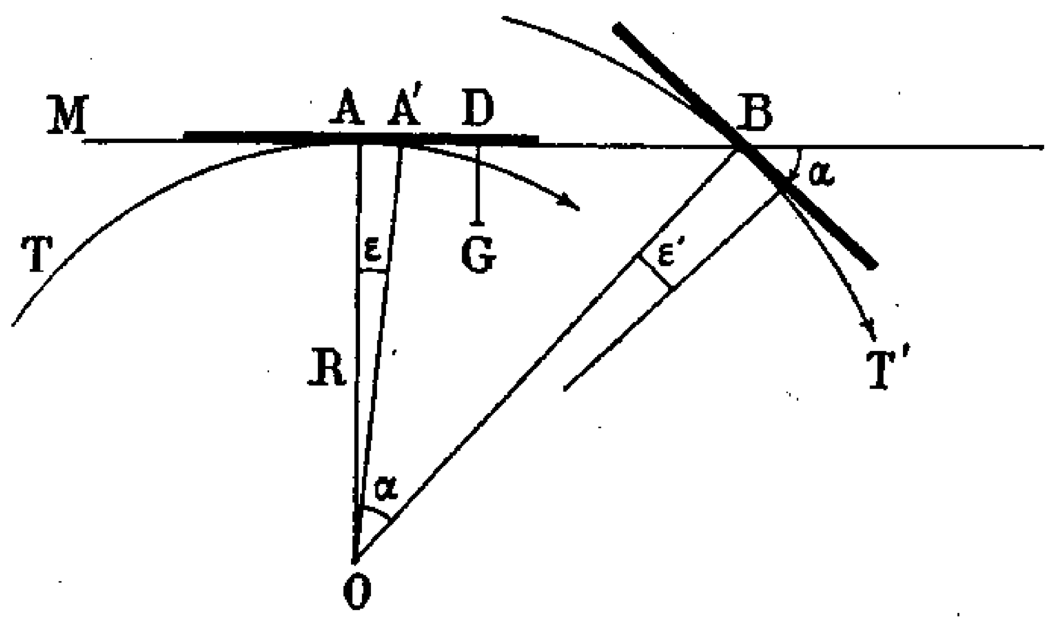

Fig. 406.

Nous poserons $\overline{AB}=a$; α désigne l'angle que fait la trace sur le sol du plan de la roue avant avec la trace du plan moyen.

Les courbes T et T′ sont les trajectoires des points A et B. Si l'on connaît T, on trouvera T′ en portant sur les tangentes à T, à partir du point de contact A, une longueur constante $\overline{AB}=a$.

Exprimons cette condition en fonction des arcs s et s' des deux trajectoires, comptés à partir d'origines quelconques prises sur ces trajectoires. Appelons x et y les coordonnées de A, x' et y' les coordonnées de B.

On a :
$$x'=x+a\frac{dx}{ds}, \qquad y'=y+a\frac{dy}{ds}; \tag{1}$$

ou les équations équivalentes :
$$\frac{dx}{x'-x}=\frac{dy}{y'-y}, \qquad (x'-x)^2+(y'-y)^2=a^2. \tag{2}$$

On a de plus :
$$\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}=\cos\alpha. \tag{3}$$

Différentions la seconde équation (2), utilisons la première ; il vient :
$$(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)=0;$$
$$dx(dx'-dx)+dy(dy'-dy)=0.$$

Par suite, l'équation (3) conduit à la relation :
$$ds=ds'\cos\alpha.$$

Les équations (1) fournissent, en dérivant par rapport à s et additionnant les carrés :
$$a^2\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]=\left(\frac{dx'}{ds}-\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy'}{ds}-\frac{dy}{ds}\right)^2;$$
ce qui donne par des transformations faciles (§ 60) :
$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{R^2}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{a^2}, \qquad \frac{1}{R}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{a};$$
R est le rayon de courbure de la trajectoire T au point A. Soit O le centre de courbure ; il résulte immédiatement de cette formule que l'angle AOB est égal à α et par suite que OB est normal à la trajectoire T′. *L'intersection des deux normales* AO et BO *détermine donc le centre de courbure de la trajectoire* T.

Considérons deux normales très voisines de celles qui correspondent au point O ; elles font avec les premières des angles ε et ε'. On a :
$$R\varepsilon=ds, \qquad R'\varepsilon'=ds'; \qquad \varepsilon'=\varepsilon+d\alpha.$$
D'où :
$$\frac{R}{R'}=\frac{ds}{ds'}\left(1+\frac{d\alpha}{\varepsilon}\right)=\cos\alpha\left(1+R\frac{d\alpha}{ds}\right)=\cos\alpha\left(1+\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\right).$$
D'où enfin l'expression de la courbure de la trajectoire T′ :
$$\frac{1}{R'}=\frac{\sin\alpha}{a}+\frac{d\alpha}{ds}\cos\alpha,$$

Si α est constant, le point O *est le centre de courbure des trajectoires* T *et* T′, *qui sont alors des circonférences concentriques.*

576. Équation des trajectoires. — Nous avons montré au § 334 qu'une courbe est définie par les équations :
$$x=\int\cos u\,ds, \qquad y=\int\sin u\,ds,$$
à la condition que la variable auxiliaire u soit reliée au rayon de courbure par la formule :
$$R\,du=ds, \qquad u=\int\frac{ds}{R}.$$

Soit α donné en fonction de s ; la trajectoire T a pour équation :
$$x=\int\cos\left(\frac{1}{a}\int\operatorname{tg}\alpha\,ds\right)ds, \qquad y=\int\sin\left(\frac{1}{a}\int\operatorname{tg}\alpha\,ds\right)ds.$$

En particulier, supposons : 1° que α reste toujours petit de manière qu'on puisse confondre l'arc et sa tangente ; 2° que le bicycliste incline son guidon avec une vitesse constante : l'angle α est donc proportionnel au temps ou, ce qui revient au même, proportionnel à l'arc (la vitesse V ne changeant pas beaucoup pendant un virage); on posera donc :

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha = ks, \qquad \int \operatorname{tg}\alpha \, ds = \frac{ks^2}{2}.$$

$$x = \int \cos\frac{ks^2}{2a}\,ds, \qquad y = \int \sin\frac{ks^2}{2a}\,ds.$$

La trajectoire T est donc la radioïde aux arcs; elle se calcule au moyen des intégrales de Fresnel. C'est évidemment le virage le plus naturel.

577. **Équation du mouvement (Boussinesq).** — Les équations rigoureuses du mouvement sont assez compliquées. Pour les simplifier, nous ne tiendrons pas compte du mouvement des roues et de la direction; nous admettrons de plus que le centre d'inertie G est dans le plan moyen, à une distance invariable h de la trace de ce plan sur le sol supposé horizontal.

Appelons θ l'inclinaison du plan moyen; nous la compterons positivement quand il penche vers le centre de courbure de la trajectoire T. Prenons l'axe des x presque parallèle à l'arc croissant s décrit par le point A au voisinage du temps considéré; prenons l'axe des y presque normal à cet axe. Appelons x, y, les coordonnées de A; ξ, η, ζ, les coordonnées du centre d'inertie.

Si le plan de la machine était vertical, le centre d'inertie se projetterait en D; posons $\overline{\mathrm{AD}} = b$.

Le point D étant sur la tangente à la trajectoire T, on a généralement :

$$\xi = x + b\frac{dx}{ds} - h\frac{dy}{ds}\sin\theta, \qquad \xi = x + bx' - hy'\sin\theta,$$

$$\eta = y + b\frac{dy}{ds} + h\frac{dx}{ds}\sin\theta, \qquad \eta = y + by' + hx'\sin\theta, \quad (1)$$

$$\zeta = h\cos\theta, \qquad \overline{\mathrm{DG}} = h\sin\theta.$$

Nous poserons : $\quad x' = \dfrac{dx}{ds}, \qquad x'' = \dfrac{d^2x}{ds^2}, \ldots$

pour abréger l'écriture.

Soit V la vitesse du point A au temps t; on a évidemment :

$$\frac{d}{dt} = \mathrm{V}\frac{d}{ds}.$$

Pour éliminer les réactions du sol qui passent par les points A et B, écrivons l'équation des moments (§ 289) par rapport à la droite AB; nous pouvons simplifier en plaçant l'axe des x exactement sur AB.

Ce n'est pas permis dans les équations (1) que nous aurons à différentier.

Le seul couple existant est dû à la pesanteur, son moment est $mgh\sin\theta$. Il tend à augmenter l'angle θ.

L'équation du mouvement, dont tous les termes sont divisés par mh, est :

$$g\sin\theta - \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\sin\theta = 0, \qquad (2)$$

qu'il suffit d'expliciter par rapport aux quantités définissant la trajectoire. On a immédiatement, d'après la valeur de ζ et l'hypothèse que h est constant :

$$g\sin\theta - \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\theta - h\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin^2\theta - h\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\cos\theta\sin\theta = 0. \quad (2')$$

578. **Transformation de l'équation.** — On a :

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathrm{V}y' + b\mathrm{V}y'' + h\mathrm{V}x''\sin\theta + hx'\frac{d\theta}{dt}\cos\theta.$$

Dérivons une seconde fois; il vient :

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d\mathrm{V}}{dt}y' + \mathrm{V}^2y'' + b\left(\frac{d\mathrm{V}}{dt}y'' + \mathrm{V}^2y'''\right) + h\left(\frac{d\mathrm{V}}{dt}x'' + \mathrm{V}^2x'''\right)\sin\theta$$
$$+ 2h\mathrm{V}x''\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + hx'\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta\right].$$

Cette expression se simplifie grâce aux formules obtenues en dérivant les expressions :

$$x'^2 + y'^2 = 1, \qquad x''^2 + y''^2 = 1 : \mathrm{R}^2.$$

On a :

$$x'x'' + y'y'' = 0, \qquad x'x''' + y'y''' + x''^2 + y''^2 = 0,$$

$$\mathrm{V}(x''x''' + y''y''') = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right).$$

Simplifions maintenant grâce à l'hypothèse (légitime, maintenant que toutes les différentiations sont faites) que l'axe des x coïncide avec AB :

$$x' = 1, \qquad y' = 0; \qquad x'' = 0, \qquad x''' = -y''^2,$$

$$\mathrm{V}y''y''' = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right).$$

On a de plus :

$$y'' = \frac{1}{\mathrm{R}}, \qquad \mathrm{V}y''' = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\right).$$

Toutes ces formules sont immédiates; on n'a d'autre peine que de les écrire. On en tire :

$$-\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{V^2}{R}\left(1-\frac{h}{R}\sin\theta\right) - b\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{R}\right)$$
$$-h\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta + h\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin\theta.$$

Il ne reste plus qu'à porter cette valeur dans l'équation des moments. Nous poserons :
$\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$; nous négligerons : $h\sin\theta : R$; il reste :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{h}\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{g}{h}\theta - \frac{V^2}{hR}.$$

Nous simplifierons encore l'équation en posant : $a = R\alpha$, et en remplaçant la vitesse variable par la vitesse moyenne :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{bV}{ah}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{h}\left(\theta - \frac{V^2}{ga}\alpha\right). \qquad (3)$$

La discussion de cette très élégante équation fournit la théorie élémentaire de la bicyclette.

579. **Discussion**. —
1° Si α est constant, c'est-à-dire si le guidon est maintenu invariable, la condition d'équilibre est :

$$\frac{V^2}{ga}\alpha = \theta, \qquad \frac{mV^2}{R} = mg\theta.$$

Elle exprime que la résultante de la force centrifuge et de la pesanteur est dans le plan du cadre (plan moyen de la machine); nous aurions pu l'écrire immédiatement.

C'est la formule dont nous nous sommes servis au § 335 pour étudier les conditions du virage et de la construction des pistes dans les vélodromes.

Mais l'équation (3) nous apprend grâce à quelle manœuvre le bicycliste pourra se remettre en équilibre, si la condition précédente ne se trouve pas satisfaite.

2° Remarquons tout d'abord que α peut varier, sans que θ change nécessairement. Il suffit que l'équation :

$$-\frac{d\alpha}{dt} + \frac{ag}{bV}\left(\theta - \frac{V^2}{ga}\alpha\right) = 0$$

soit satisfaite. On trouve :

$$\alpha = \frac{ag\theta}{V^2} + ke^{-\frac{Vt}{b}};$$

k est une constante à déterminer par les conditions initiales. Donc on peut toujours revenir, sans changer l'inclinaison du cadre, à une position du guidon qui corresponde à un angle α donné et par conséquent à un rayon de courbure donné pour la trajectoire.

3° Supposons donc qu'on soit *en train de tomber*, c'est-à-dire que pour une raison quelconque θ soit en train de croître. Sa dérivée $d\theta : dt$ est donc positive. Il s'agit de l'annuler. On y parvient en utilisant le terme en $d\alpha : dt$. Il faut créer une dérivée seconde négative et *par conséquent tourner brusquement le guidon vers le côté où l'on se sent jeté;* plus vulgairement dit, *il faut tourner brusquement du côté où l'on tombe.*

Remarquons que l'action sera double; on tend à arrêter la chute (à diminuer et à annuler la dérivée positive $d\theta : dt$ due à la cause étrangère) d'abord parce qu'on agit sur le terme en $d\alpha : dt$, ensuite parce que, α croissant, la parenthèse, qui par hypothèse était nulle (on tombe à partir d'une position d'équilibre), devient négative.

La dérivée $d\theta : dt$ une fois annulée, on revient à la position α du guidon qui correspond au rayon de courbure imposé par la route, au moyen de l'opération 2° qui ne change pas l'inclinaison θ du cadre.

Si l'inclinaison avait eu le temps de varier, on en serait quitte pour exagérer la manœuvre et redresser la machine. On mettrait seulement ensuite un temps et un parcours plus longs à revenir à l'inclinaison normale α du guidon.

De ce que nous pouvons faire une théorie très approchée de la bicyclette sans faire intervenir les forces gyroscopiques résultant de la rotation des roues, il faut conclure (ce qu'un calcul complet démontre) qu'elles interviennent beaucoup moins que la force centrifuge.