

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

ABR2691

UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1

035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B51413

035/2: : |a (CaOTULAS)160124019

040: : |a MiU |c MiU

100:1 : |a Carvallo, E. |q (Emmanuel), |d 1856-

245:00: |a Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette ...

260: : |a [Paris, |b Gauthier-Villars, |c 1901?]

300/1: : |a 193 p.

500/1: : |a Caption title.

650/1: 0: |a Roulettes (Geometry)

650/2: 0: |a Cycloids

998: : |c DPJ |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____

Camera Operator: _____

Carvallo (C.), Théorie du mouvement
du monocycle et de la bicyclette.
1898.

Alexandre Fivet

THÉORIE
DU
MOUVEMENT DU MONOCYCLE ET DE LA BICYCLETTE ⁽¹⁾;

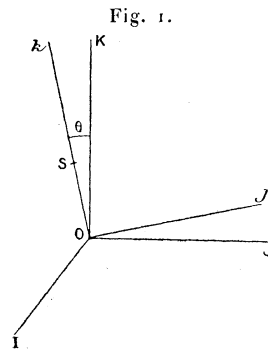
PAR M. E. CARVALLO.

PREMIÈRE PARTIE.
CERCEAU ET MONOCYCLE.

CHAPITRE PREMIER.
CERCEAU.

§ I. — CINÉMATIQUE DU CERCEAU. NOTATIONS ET CHOIX DES VARIABLES.

1. *Axes de coordonnées; conventions générales.* — Le cerceau étant supposé réduit à une circonférence homogène de rayon R et de masse μ , soient (*fig. 1*) :



S, le centre du cerceau;
O, son point de contact avec le sol;
OK, la verticale du point O;

(¹) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Fourneyron, 1898).

OI, la tangente au point O, dans le sens du mouvement ;
 OJ, la position que prend OI après une rotation d'un angle droit, de droite à gauche autour de OK.

Outre le trièdre OIJK, nous aurons à considérer un second trièdre OI*jk* défini de la façon suivante :

Soit θ l'angle du plan du cerceau avec la verticale OK, compté positivement de droite à gauche autour de OI. Une rotation de l'angle θ autour de OI amène OJ sur la normale O*j* au plan du cercle et OK sur la ligne de plus grande pente Ok; OI*jk* est le second trièdre considéré. Il est à remarquer que ces deux trièdres OIJK et OI*jk* sont tous deux mobiles, à la fois dans l'espace et par rapport au cerceau.

Les conventions de sens seront fixées ainsi : le vecteur qui représente une rotation est porté dans un sens tel que la rotation ait lieu de droite à gauche pour un observateur placé les pieds à l'origine et la tête à l'extrémité de ce vecteur. Le moment d'une force par rapport à un point est porté suivant l'axe de la rotation que tend à produire cette force autour du point supposé fixe. Avec Grassmann, nous désignerons par $|IJ = K$, par exemple, la vitesse de l'extrémité du vecteur J, pour la rotation I, ou encore le moment de la force J, appliquée à l'extrémité du vecteur I, et par rapport à l'origine de I.

Les vitesses seront caractérisées, soit par le symbole différentiel $\frac{d}{dt}$, soit par l'accent ($'$).

2. Roulement du cerceau; rotations. — Dire que le cerceau roule, c'est dire que le point qui est actuellement en O a une vitesse nulle. Tout mouvement compatible avec la liaison se réduit alors à une rotation instantanée Ω autour du point O. Nous aurons à considérer les trois composantes p, q, r de cette rotation suivant les unités vecteurs I, *j*, *k*, et aussi ses composantes p, s, n suivant I, *j*, K; on aura entre ces rotations la double égalité vectorielle

$$(1) \quad \Omega = pI + qj + rk = pI + sj + nK.$$

Les relations numériques entre ces composantes s'obtiennent, si l'on veut, par le théorème des projections : on a

$$(2) \quad \begin{cases} q = s + n \sin \theta, \\ r = n \cos \theta, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(3) \quad \begin{cases} n = \frac{r}{\cos \theta}, \\ s = q - r \operatorname{tang} \theta. \end{cases}$$

Les composantes p , q , r ont la prépondérance au point de vue dynamique, parce qu'elles correspondent à trois axes principaux d'inertie; mais toute l'importance cinématique appartient aux composantes p , s , n dont la signification pratique est caractérisée par les dénominations suivantes :

p , vitesse de chute;

s , vitesse de roulement;

n , vitesse de conversion.

La rotation $\Phi = Ip + Kn$ ne change pas le diamètre de plus grande pente k par rapport au cerceau, mais entraîne ce diamètre dans un mouvement d'ensemble avec le cerceau; cette rotation est sans effet sur le roulement. Au contraire, la rotation js laisse fixe *dans l'espace* la ligne de plus grande pente k , mais fait glisser sur elle le cerceau, avec la vitesse angulaire s . Le point de contact avec le sol se déplace sur le cerceau et sur le sol avec la vitesse sR .

3. Vitesses des vecteurs envisagés. — On se familiarisera avec ces rotations en calculant les vitesses qu'elles impriment aux extrémités des vecteurs envisagés, vitesses dont nous ferons usage plus loin (§ II).

Les vitesses des extrémités des vecteurs I et J sont dues à la rotation

$\mathbf{K}n$ seule et ont pour valeurs

$$(4) \quad \begin{cases} I' = |\mathbf{K}n \cdot \mathbf{I} = \mathbf{J}n = n(j \cos \theta - k \sin \theta) = r(j - k \tan \theta), \\ J' = |\mathbf{K}n \cdot \mathbf{J} = -\mathbf{I}n = -\mathbf{I} \frac{r}{\cos \theta}. \end{cases}$$

Quant aux vecteurs j et k , leurs vitesses sont dues à la rotation $\Phi = p\mathbf{I} + n\mathbf{K}$ et ont pour valeurs

$$(5) \quad \begin{cases} j' = |(p\mathbf{I} + n\mathbf{K})j = pk - \mathbf{I}n \cos \theta = pk - \mathbf{I}r, \\ k' = |(p\mathbf{I} + n\mathbf{K})k = -pj + \mathbf{I}n \sin \theta = -pj + \mathbf{I}r \tan \theta. \end{cases}$$

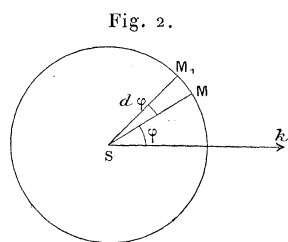
Enfin la vitesse de l'extrémité du vecteur Φ se calcule en dérivant Φ . Elle a pour expression

$$(6) \quad \Phi' = \mathbf{I}p' + \mathbf{K}n' + \mathbf{J}pn.$$

A. Moments d'inertie A, B, C du cerceau par rapport aux axes I, j, k (fig. 2). — Le moment C est celui du cerceau par rapport au diamètre Sk .

Soit μ la masse totale du cerceau :

La masse de l'élément $MM_1 = d\varphi$, qui a pour azimut φ , est $\mu \frac{d\varphi}{2\pi}$;



sa distance à l'axe Sk est $R \sin \varphi$. Le moment d'inertie est donc

$$C = 2 \int_0^\pi \mu \frac{d\varphi}{2\pi} \times R^2 \sin^2 \varphi = \frac{\mu R^2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\mu R^2}{2}.$$

Le moment d'inertie A est le même, augmenté du moment d'inertie du

centre S par rapport à OI, savoir

$$A = \frac{\mu R^2}{2} + \mu R^2 = \frac{3\mu R^2}{2}.$$

Enfin le moment d'inertie B est égal à celui du cerceau par rapport à son axe μR^2 , augmenté du moment d'inertie de S par rapport à Oj qui est encore μR^2 , soit au total

$$B = 2\mu R^2.$$

En résumé on a, pour les trois moments d'inertie,

$$(7) \quad \begin{cases} A = \frac{3\mu R^2}{2}, \\ B = 2\mu R^2, \\ C = \frac{\mu R^2}{2}. \end{cases}$$

§ II. — ÉQUATIONS DU ROULEMENT DU CERCEAU.

3. *Application du principe des travaux virtuels.* — Tout mouvement compatible avec le roulement du cerceau se réduit à une rotation instantanée autour de son point d'appui O. Le degré de liberté est 3 et l'équation des travaux virtuels se réduit à celle des moments par rapport au point O. La seule force appliquée est le poids P du cerceau qui a pour direction — K et pour intensité le produit de sa masse μ par l'accélération g de la pesanteur. Le bras de levier de la force est le vecteur OS qui a pour expression kR . Le moment du poids est donc

$$\mathfrak{M} = |kR \cdot (-\mu g K) = \mu g R \cdot |K k = + I \mu g R \sin \theta.$$

Nous devons écrire que ce moment augmenté de celui des forces d'inertie est nul. Si donc on désigne par \mathfrak{J} le moment changé de signe des forces d'inertie, l'équation vectorielle des moments sera

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{J}.$$

Le calcul du vecteur \mathfrak{J} demande quelque développement.

6. Moment résultant des forces d'inertie. — Soit m la masse d'un élément du cerceau, situé en \mathbf{M} ; nous devons calculer le vecteur

$$\mathfrak{J} = \sum m \left| (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \right. \quad (1).$$

On peut calculer cette expression directement, mais on simplifie le calcul par la transformation que voici :

$$\left| (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \right. = \frac{d}{dt} \left| (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right. + \left| \frac{d\mathbf{O}}{dt} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right. \quad (2).$$

Le premier de ces deux termes, porté dans l'expression de \mathfrak{J} , donne la vitesse de l'extrémité du moment de la quantité de mouvement; cette vitesse a pour valeur, comme on sait

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{d}{dt} (\mathbf{A}p\mathbf{I} + \mathbf{B}q\mathbf{j} + \mathbf{C}rk).$$

Le second terme donne

$$\mathfrak{J}_2 = \left| \frac{d\mathbf{O}}{dt} \cdot \sum m \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right. = \nu \left| \frac{d\mathbf{O}}{dt} \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right. \\ \left(\text{car } \sum m \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \nu \frac{d\mathbf{S}}{dt}; \quad \text{th. sur les centres de gravité} \right).$$

Nous avons à calculer \mathfrak{J}_1 et \mathfrak{J}_2 . Pour \mathfrak{J}_1 , il n'y a qu'à dériver l'expression $\mathbf{A}p\mathbf{I} + \mathbf{B}q\mathbf{j} + \mathbf{C}rk$ en appliquant les formules (4) et (5) (§ I, n° 3).

(¹) Dans la notation de Grassmann, $\mathbf{M} - \mathbf{O}$ représente le vecteur qui va du point \mathbf{O} au point \mathbf{M} .

(²) Cette transformation est celle que l'on fait dans l'intégration par parties; on applique, en outre, la relation évidente

$$\left| \frac{d\mathbf{M}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right. = 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 = & I A p' + j B q' + k C r' \\ & + A p r (j - k \operatorname{tang} \theta) + B q (-I r + k p) + C r (I r \operatorname{tang} \theta - j p). \end{aligned}$$

Pour le calcul de \mathfrak{J}_2 , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dt} = & + I s R \quad (\text{car la vitesse du point } O \text{ est égale à } R s \text{ et dirigée suivant } I), \\ \frac{dS}{dt} = & |\Omega(S - O) = |(I p + j q + k r) k R = R(-j p + I q), \end{aligned}$$

et par suite

$$\mathfrak{J}_2 = \mu s R^2 | I(-j p + I q),$$

ou enfin

$$\mathfrak{J}_2 = -k \mu s R^2 p$$

et, en remplaçant s par sa valeur (3) (n° 2),

$$\mathfrak{J}_2 = -k \mu R^2 p (q - r \operatorname{tang} \theta).$$

On a en résumé, pour le moment des forces d'inertie changé de signe,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = \begin{cases} I [A p' - B q r + C r^2 \operatorname{tang} \theta] \\ + j [B q' + (A - C) p r] \\ + k [C r' + (\mu R^2 - A) p r \operatorname{tang} \theta + (B - \mu R^2) p q]. \end{cases}$$

7. *Équations définitives du mouvement du cerceau.* — Si l'on rapproche le dernier résultat de la valeur trouvée pour le moment du poids du cerceau (n° 5), savoir :

$$\mathfrak{M} = I g \mu R \sin \theta,$$

on obtient une équation vectorielle $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ qui fournit les trois équations

cartésiennes du mouvement, savoir :

$$\begin{aligned} Ap' - Bqr + Cr^2 \operatorname{tang} \theta &= \mu g R \sin \theta, \\ Bq' + (A - C)pr &= 0, \\ Cr' + (-A + \mu R^2)pr \operatorname{tang} \theta + (B - \mu R^2)pq &= 0. \end{aligned}$$

A titre de vérification, on peut retrouver l'équation des forces vives en ajoutant ces trois équations après les avoir multipliées respectivement par p , q , r . Il faut, bien entendu, tenir compte de la relation

$$A = C + \mu R^2.$$

Celle-ci exprime que le cerceau est de révolution autour de son axe, condition nécessaire à notre analyse. Sous cette condition, tous les termes disparaissent, sauf les termes en p' , q' , r' et le terme unique des seconds membres. On trouve bien ainsi l'équation des forces vives.

Il ne reste qu'à remplacer A , B , C par leurs valeurs (7) (n° 4) pour avoir les équations définitives

$$(1) \quad \begin{cases} (I) & \frac{3}{2}p' - 2qr + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tang} \theta = \frac{g}{R} \sin \theta, \\ (j) & 2q' + rp = 0, \\ (k) & \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}rp \operatorname{tang} \theta + pq = 0. \end{cases}$$

Avec les variables p , n , s (n° 2), les équations (1) sont remplacées par celles-ci :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{3}{2}p' - 2sn \cos \theta - \frac{3}{2}n^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{g}{R} \sin \theta, \\ \frac{1}{2}n' + \frac{ps}{\cos \theta} = 0, \\ 2s' - 4ps \operatorname{tang} \theta + 3pn \cos \theta = 0. \end{cases}$$

§ III. — ÉQUILIBRE DU CERCEAU; STABILITÉ; DÉRAPAGE.

8. *Conditions d'équilibre du cerceau.* — L'angle θ , que j'appellerai

angle de chute, est la fonction du temps la plus importante, puisqu'elle renseigne sur la chute du cerceau ou le maintien de son équilibre. Nous devons donc porter notre attention sur la vitesse de chute p qui est définie par le système des trois équations du mouvement (n° 7)

$$(1) \quad \begin{cases} p' = \frac{2g \sin \theta}{3R} + \frac{4qr}{3} - \frac{r^2 \tan \theta}{3}, \\ q' = -\frac{pr}{2}, \\ r' = pr \tan \theta - 2pq. \end{cases}$$

Pour avoir les conditions d'équilibre, j'adopte la condition initiale

$$(2) \quad p_0 = 0 \quad (1)$$

et je calcule le développement de p suivant la formule de Taylor

$$(3) \quad p = p_0 + p'_0 t + \frac{p''_0}{2!} t^2 + \frac{p'''_0}{3!} t^3 + \dots$$

Pour avoir p'' , je dérive la première des équations (1) qui est de la forme

$$p' = f(q, r, \theta);$$

p'' sera donc de la forme

$$p'' = q' \frac{\partial f}{\partial q} + r' \frac{\partial f}{\partial r} + p \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Si l'on remplace q' et r' par leurs valeurs (1), l'expression de p'' contient p en facteur et se met sous la forme

$$(4) \quad p'' = p f_1(q, r, \theta), \quad \text{avec} \quad f_1 = \frac{q'}{p} \frac{df}{dq} + \frac{r'}{p} \frac{df}{dr} + \frac{df}{d\theta}.$$

(1) Il est à remarquer que, si le mouvement est stable, il y a un moment où le cerceau cesse de tomber pour se relever et qu'à ce moment on a $p_0 = 0$. Cette analyse est ainsi plus générale qu'on pourrait croire au premier abord.

Comme p_0 est supposé nul, p_0'' est aussi nul. A cause de cette hypothèse que p_0 est nul, une simplification semblable se présentera dans toutes les dérivées de p . Pour cette raison, il y a intérêt à ordonner les dérivées de p suivant les puissances de p .

L'équation (4), dérivée à son tour, donne

$$p''' = p'f_1 + p^2f_2 = ff_1 + p^2f_2,$$

où la fonction f_2 est dérivée de la fonction f_1 comme f_1 est dérivée de f .

On obtient ainsi la suite des dérivées de p

$$(5) \quad p' = f, \quad p'' = pf_1, \quad p''' = ff_1 + p^2f_2, \quad \dots,$$

et l'on voit que toute dérivée $p^{(n)}$ aura pour expression un polynome entier en p dont les coefficients se calculent au moyen des fonctions f, f_1, f_2, \dots ; d'ailleurs, chacune de ces fonctions de q, r, θ se déduit de la précédente en la dérivant et supprimant le facteur p .

Cherchons une loi de récurrence entre ces polynomes. Soit P_n le polynome qui représente la dérivée d'ordre n . Nous désignerons par $\frac{\partial}{\partial p}$ les dérivées par rapport à p , et par pD , la partie de la dérivation par rapport à t , obtenue en traitant p comme une constante. Il vient

$$(6) \quad p^{n+1} = \frac{dP_n}{dt} = pDP_n + p' \frac{\partial P_n}{\partial p} = pDP_n + f \frac{\partial P_n}{\partial p}.$$

De cette formule et des formules (5) obtenues pour les premières dérivées, il résulte que les dérivées d'ordre pair sont des polynomes P_2, P_4, \dots impairs en p , et que les dérivées d'ordre impair P_1, P_3, \dots sont des polynomes pairs. Puisque p_0 est supposé nul, les polynomes P_2, P_4, \dots s'annulent pour $t = 0$. Ainsi, dans le développement (3) de p , les termes de degré pair en t disparaissent : p est une fonction impaire du temps. Quant aux coefficients des puissances impaires de t , ils proviennent des polynomes P_1, P_3, \dots qui sont pairs en p ; pour $t = 0$, ces polynomes se réduisent à leurs termes indépendants de p .

Pour obtenir une formule de récurrence entre les dérivées d'ordre impair, je calcule $p^{(n+2)}$ au moyen de l'expression (6) de $p^{(n+1)}$ où je suppose n impair. Dans cette hypothèse, P_n est un polynome pair de la forme

$$p^{(n)} = P_n = A_n + p^2 B_n + \dots,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial P_n}{\partial p} = 2p B_n + p^3 [\dots] \quad \text{et} \quad DP_n = DA_n + p^2 [\dots].$$

D'après cela et d'après la formule (6), p^{n+1} a pour expression

$$p^{n+1} = p [DA_n + 2fB_n] + p^3 [\dots],$$

d'où l'on tire

$$p^{(n+2)} = p'(DA_n + 2fB_n) + p^2 (\dots).$$

Je remplace p' par son expression $f(q, r, \theta)$ et j'obtiens pour la partie de p^{n+2} qui est indépendante de p ,

$$(7) \quad A_{n+2} = fDA_n + 2f^2 B_n.$$

Telle est la formule de récurrence cherchée. Elle conduit à cette conséquence importante que, si l'expression f de p' est, avec p , nulle à l'origine du temps, tous les termes de la formule de Taylor (3) sont nuls; p est alors constamment nul et les formules (1) donnent $q' = 0$, $r' = 0$. Par suite, la solution des équations est donnée par les formules

$$p = 0, \quad q = q_0, \quad r = r_0.$$

Il en résulte que l'angle de chute θ , la vitesse de roulement s et la vitesse de conversion n sont aussi des constantes θ_0 , s_0 , n_0 . La trajectoire du cerceau est un cercle de rayon

$$\rho = \frac{s_0 R}{n_0}.$$

C'est bien par ces circonstances qu'on doit caractériser l'équilibre d'un cerceau qui roule. La condition d'équilibre trouvée est

$$0 = p' = f(\theta, q, r) = \frac{2g \sin \theta}{3R} + \frac{4qr}{3} - \frac{r^2 \tan \theta}{3}.$$

Je remplace q et r par leurs valeurs (2) (n° 2) en fonction de s et n et j'obtiens l'équation d'équilibre définitive

$$(E) \quad \frac{2g \sin \theta}{3R} + \frac{4sn}{3} \cos \theta + n^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

J'indiquerai plus loin (n° 10) une méthode plus intuitive pour obtenir cette équation d'équilibre (E).

9. *Stabilité du cerceau.* — Le cerceau sera dit *stable* si l'angle de chute θ oscille entre deux valeurs quelconques inférieures à $\frac{\pi}{2}$. Il sera dit *instable* dans le cas contraire. Je traiterai seulement le cas où la vitesse initiale de chute est nulle; les calculs du n° 8 s'appliquent alors et fournissent la formule de récurrence

$$(7) \quad A_{n+2} = fDA_n + 2f^2B_n \quad (\text{n° 8}).$$

Dans cette expression, on doit remplacer les lettres par les valeurs qu'elles prennent pour $t = 0$, et ce sont les valeurs ainsi trouvées qui doivent être portées dans la formule de Taylor (3), n° 8. Le calcul devient tout à fait simple si l'on traite comme un infiniment petit la valeur que prend f à l'origine du temps. On obtiendra ainsi une formule d'autant plus approchée que f sera plus petit, c'est-à-dire que la condition d'équilibre sera plus près d'être satisfaite.

Dans ce cas, en effet, f^2B_n devient négligeable et l'on a

$$A_{n+2} = fDA_n.$$

Telle est la formule définitive que nous appliquerons aux valeurs im-

paire de l'indice. En partant de la première

$$A_1 = p' = f(q, r, \theta) = \frac{2g \sin \theta}{3R} + \frac{4qr}{3} - \frac{r^2 \tan \theta}{3},$$

il vient

$$A_1 = f, \quad A_3 = ff_1, \quad A_5 = ff_1^2, \quad \dots, \quad A_{2n+1} = ff_1^n.$$

Telles sont les formules qu'on doit appliquer pour $t = 0$. En portant ces valeurs dans l'expression de p (formule 3, n° 8), j'obtiens

$$p = ft + \frac{ff_1 t^3}{3!} + \frac{ff_1^2 t^5}{5!} + \dots + \frac{ff_1^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Ici, trois hypothèses se présentent : Si f_1 est nul, on a $p = ft$ et, par suite,

$$(8) \quad \theta = \theta_0 + \frac{1}{2} ft^2.$$

La chute est uniformément accélérée.

Si f_1 est positif, je pose $f_1 = h^2$ et je multiplie les deux membres par $\frac{h}{f}$; il vient

$$(9) \quad \frac{ph}{f} = \frac{ht}{1} + \frac{h^3 t^3}{3!} + \frac{h^5 t^5}{5!} + \dots = \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2},$$

d'où l'on tire

$$(10) \quad p = \frac{f}{h} \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2}.$$

La chute a lieu suivant une loi exponentielle.

Enfin, si f_1 est négatif, je pose $f_1 = -h^2$. La formule (9) donne alors

$$(11) \quad p = \frac{f}{h} \sin ht,$$

d'où l'on déduit

$$\theta = \theta_0 + \frac{2f}{h^2} \sin^2 \frac{ht}{2}.$$

Dans ce cas, le mouvement de chute du cerceau est pendulaire et le cerceau est stable. Sa position moyenne est donnée par l'expression $\theta_0 + \frac{f}{h^2}$. Comme on le voit, l'angle de chute initial est augmenté ou diminué suivant que f est positif ou négatif.

La méthode que nous avons suivie pour le calcul de p permet de calculer aussi les vitesses de rotation s et n et d'achever ainsi la détermination complète du mouvement. Il est bien clair qu'on trouve pour s et n des valeurs périodiques. Cette partie du calcul ne présentant aucun intérêt pour la suite, nous l'éviterons ici pour ne pas alourdir l'exposition.

Il nous reste à calculer $-f_1 = h^2$; nous avons pour cela

$$f = p' = \frac{2g \sin \theta}{3R} + \frac{4qr}{3} - \frac{r^2 \tan \theta}{3},$$

d'où l'on tire

$$-f_1 = -\frac{1}{p} p'' = -\frac{2g \cos \theta}{3R} - \frac{4(q'r + qr')}{3p} + \frac{2rr'}{3p} \tan \theta + \frac{r^2}{3 \cos^2 \theta}.$$

Dans cette dernière formule, je remplace q' et r' par leurs valeurs (1) (n° 8), puis enfin q et r par leurs valeurs (2) (n° 2) en fonction de n et s . J'obtiens ainsi, pour la condition de stabilité,

$$(S) \quad -\frac{p''}{p} = \frac{-2g \cos \theta}{3R} + n^2 + \frac{8sn \sin \theta}{3} + \frac{8s^2}{3} > 0.$$

Comme vérification, on a exécuté tous les calculs du § III en faisant d'abord dans le système (1) (n° 8) le changement de variables qui consiste à remplacer les variables q, r par les variables n, s (n° 2).

10. Tendence au dérapage. — Suivant l'usage des cyclistes, j'appelle *dérage* le glissement du cerceau sur le sol, par suite d'une insuffisance de la force résistante de frottement. Bien entendu, je m'occupe seulement du glissement normal à la trajectoire et qui provoque la chute,

et non pas du glissement tangentiel, lequel est dépourvu d'intérêt ici et ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

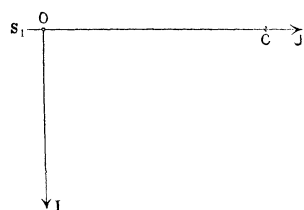
Envisageant seulement un état d'équilibre, je considère le mouvement du cerceau comme résultant de deux autres :

Une rotation n , autour de l'axe de conversion, et constituant le mouvement d'entraînement;

Une rotation s , autour de l'axe du cerceau, et constituant le mouvement relatif.

Les forces d'inertie sont alors de trois sortes : celles du mouvement d'entraînement, celles du mouvement relatif, enfin les forces centrifuges composées. Or, pour un point quelconque du cerceau, les expressions de ces forces sont linéaires par rapport au point. Les résultantes de translation de ces forces se réduisent alors aux forces correspondantes évaluées pour le centre S . D'ailleurs, pour le centre, le mouvement relatif étant nul, les forces d'inertie se réduisent à la force centrifuge d'entraînement due à la vitesse de conversion n . Pour évaluer cette force, je représente

Fig. 2 bis.



(*fig. 2 bis*) sur le sol les axes OI et OJ, la projection S_1 du centre du cerceau, enfin le centre de conversion C. Le rayon de conversion du point S est

$$S_1C = S_1O + OC = R \sin \theta + \frac{sR}{n} = R \left(\sin \theta + \frac{s}{n} \right).$$

La force centrifuge est dirigée suivant le vecteur unité $-J$ et a pour expression

$$F = -J \mu R n^2 \left(\sin \theta + \frac{s}{n} \right).$$

A cette force d'inertie s'ajoute le poids du cerceau,

$$P = -K \mu g,$$

et leur résultante doit être équilibrée par le frottement au point de contact O du cerceau sur le sol. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la tangente de l'angle que fait la résultante avec la verticale soit inférieure au coefficient de frottement. Il est naturel d'appeler *tendance au dérapage* la valeur de cette tangente $\pm \frac{R}{g}(n^2 \sin \theta + sn)$. De plus, d'après l'expression de F , le dérapage tend à se produire dans le sens de l'axe J quand $n^2 \sin \theta + sn$ est négatif. Si donc j'adopte pour la tendance au dérapage l'expression

$$D = -\frac{R}{g}(n^2 \sin \theta + sn),$$

le signe de D fera connaître le sens dans lequel le cerceau tend à dérapier, le sens de l'axe J correspondant à des valeurs positives de D .

11. Méthode directe pour obtenir l'équation d'équilibre. — La méthode qu'on vient de suivre (n° 10) permet d'établir l'équation d'équilibre (E) qui a été obtenue au n° 8 par une analyse plus lourde mais plus complète. Il suffit de prendre les moments, par rapport à OI , des forces considérées au n° 10. La force centrifuge du roulement, étant dans le plan du cerceau, a un moment nul par rapport à OI .

La force centrifuge de conversion a pour moment

$$(1) \quad \mu R^2 sn \cos \theta + \frac{3}{2} \mu R^2 n^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Enfin la force centrifuge composée a pour moment :

$$(2) \quad \mu R^2 sn \cos \theta.$$

Je n'entrerai pas dans le détail du calcul de ces moments; ils s'ob-

tiennent sans effort par le calcul géométrique. Si à ces moments on ajoute celui du poids du cerceau, savoir :

$$(3) \quad \mu g R \sin \theta,$$

et qu'on égale à zéro la somme des moments (1), (2), (3), on retrouve, au coefficient $\frac{2}{3}$ près, l'équation d'équilibre précédemment écrite (n° 8),

$$\frac{g \sin \theta}{R} + 2 sn \cos \theta + \frac{3}{2} n^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

§ IV. — DISCUSSION DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE.

12. Changement de variables et plan de la discussion. — Nous avons trouvé, pour l'équation d'équilibre, la condition de stabilité, la tendance au dérapage, les trois formules :

$$(E) \quad \frac{g \sin \theta}{R} + 2 sn \cos \theta + \frac{3}{2} n^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (\text{n}^\circ 8),$$

$$(S) \quad -\frac{2g \cos \theta}{3R} + n^2 + \frac{8sn \sin \theta}{3} + \frac{8s^2}{3} > 0 \quad (\text{n}^\circ 9),$$

$$(D) \quad -\frac{R}{g}(n^2 \sin \theta + sn) = D \quad (\text{n}^\circ 10).$$

Dans le but de simplifier les discussions qui vont suivre, en les ramenant à un seul barème applicable à tous les cerceaux et à toutes les altitudes (¹), je prendrai pour inconnues, non plus s et n , mais les rapports de ces rotations à l'expression $\sqrt{\frac{g}{R}}$ qui leur est homogène. Comme la transformation revient à un changement d'unités, pour ne pas charger le sujet de nouvelles notations, je continuerai à désigner par s et n les nouvelles inconnues; il suffit de faire $\frac{g}{R} = 1$ dans les formules (E), (S), (D). Les

(¹) R et g quelconques.

nouvelles formules, ordonnées par rapport à n , s'écrivent ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad & n^2 + \frac{4s}{3 \sin \theta} n + \frac{2}{3 \cos \theta} = 0, \\ \text{(S)} \quad & n^2 + \frac{8s \sin \theta}{3} n + \frac{8s^2}{3} - \frac{2 \cos \theta}{3} > 0, \\ \text{(D)} \quad & -n^2 \sin \theta - sn = D. \end{aligned}$$

Ces relations sont du second degré en n ; θ , s , n sont trois paramètres dont on dispose dans le jeu du cerceau. L'équation (E) ne change pas quand on remplace n par $-n$ et, en même temps, θ par $-\theta$. Ce fait exprime la symétrie évidente du phénomène par rapport au plan vertical OIK, et permet de simplifier la discussion en faisant varier θ de 0 à $+\frac{\pi}{2}$ seulement. L'équation (E) montre aussi un fait bien familier : c'est que, à l'état d'équilibre, *le cerceau tourne du côté où il penche*. En effet, s est essentiellement positif; si l'on suppose θ positif, l'équation (E) exige que n soit négatif, ce qui entraîne que le centre de conversion C soit du même côté que la projection du centre du cerceau. La vitesse angulaire s et l'angle θ étant choisis, l'équation (E) détermine n ; cette valeur, pour être acceptable, doit être réelle, satisfaire à l'inégalité (S) et donner à D une valeur inférieure au coefficient de frottement. Ce sont ces trois conditions que nous allons successivement discuter.

13. Discussion de l'équation d'équilibre (fig. 3).

$$\text{(E)} \quad n^2 + \frac{4s}{3 \sin \theta} n + \frac{2}{3 \cos \theta} = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

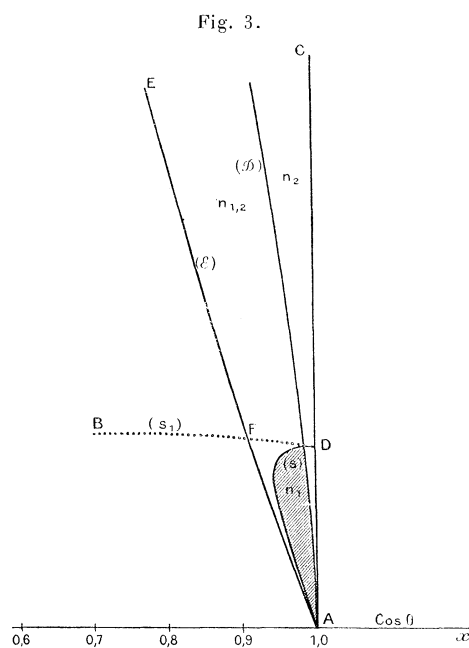
$$\text{(E)} \quad 0 < \frac{4s^2}{9 \sin^2 \theta} - \frac{2}{3 \cos \theta} \quad \text{ou} \quad 0 < \frac{2}{3} s^2 \cos \theta - \sin^2 \theta,$$

⁽¹⁾ En transcrivant ces formules, on a divisé les deux membres de l'équation (E) par $\sin \theta \cos \theta$. Cela suppose θ différent de $\frac{\pi}{2}$ et de zéro; mais le premier de ces cas est impossible et le second est très intuitif.

ou encore, en ordonnant par rapport à $\cos\theta$,

$$(\mathcal{E}) \quad \cos^2\theta + \frac{2}{3}s^2 \cos\theta - 1 > 0.$$

Pour discuter cette inégalité, je trace la courbe AE (*fig. 3*) que repré-



sente son premier membre égalé à zéro, quand on prend pour coordonnées

$$x = \cos\theta, \quad y = s^2 \quad (x^2 + \frac{2}{3}xy - 1 = 0).$$

C'est une branche d'hyperbole qui part du point A ($x = 1, y = 0$); elle a pour asymptote l'axe Oy , qui n'a pu trouver place sur la figure.

Si le point $M(x, y)$ est à gauche de la courbe AE, l'inégalité (\mathcal{E}) n'est pas satisfaite : l'équation (E) est impossible. Celle-ci admet au contraire deux racines réelles n_1, n_2 donnant l'équilibre quand le point M est à droite de la courbe AE. L'inégalité (\mathcal{E}) peut d'ailleurs être résolue facilement, soit par rapport à s^2 , soit par rapport à $\cos\theta$.

14. *Discussion de la stabilité.* — Je rappelle l'équation d'équilibre et la condition de stabilité

$$(E) \quad E(n) = n^2 + \frac{4s}{3\sin\theta}n + \frac{2}{3\cos\theta} = 0,$$

$$(S) \quad S(n) = n^2 + \frac{8s\sin\theta}{3}n + \frac{8s^2}{3} - \frac{2\cos\theta}{3} > 0.$$

Il s'agit de savoir si une des racines n_1 ou n_2 de l'équation (E) satisfait à la condition (S). La question se pose seulement pour les valeurs (s, θ) qui mises dans l'équation (E) donnent des valeurs réelles de n , c'est-à-dire (n° 15) pour les points $M(s, \theta)$ situés dans la région EAC du plan (*fig. 3*). J'examine d'abord ce qui se passe le long de la courbe AE elle-même. Sur cette courbe, on a

$$(1) \quad \frac{4s^2}{9\sin^2\theta} - \frac{2}{3\cos\theta} = 0,$$

et l'équation (E) a ses racines égales à

$$(2) \quad n_1 = n_2 = -\frac{2s}{3\sin\theta}.$$

Cette valeur substituée dans S(n) donne

$$(3) \quad S\left(-\frac{2s}{3\sin\theta}\right) = \frac{4s^2}{9\sin^2\theta} + \frac{8s^2}{9} - \frac{2\cos\theta}{3},$$

et cette expression est visiblement positive d'après l'égalité (1). Ainsi, la condition de stabilité (S) est satisfaite par les valeurs d'équilibre qu'on obtient le long de AE.

Je suis maintenant la droite AC, c'est-à-dire que je fais $\theta = 0$ ou mieux θ infiniment petit; il vient

$$E(n) = \frac{1}{\sin\theta} \left(n^2 \sin\theta + \frac{4sn}{3} \right) + \frac{2}{3},$$

$$S(n) = n^2 + \frac{8s^2}{3} - \frac{2}{3}.$$

Les racines de $E(n)$ sont ⁽¹⁾

$$n_1 = -\infty, \quad n_2 = 0.$$

La première rend $S(n)$ positif; la seconde réduit $S(n)$ à $\frac{8s^2}{3} - \frac{2}{3}$. Elle ne rend $S(n)$ positif que pour $s^2 > \frac{1}{4}$, c'est-à-dire pour les points de AC situés au-dessus du point D ($y = s^2 = \frac{1}{4}$). De ces remarques il résulte qu'on peut affirmer l'existence d'une courbe (S) située dans la région EAC, partant de A, aboutissant au point D, et séparant la région EAC en deux parties : dans la première, contenant AD, la plus petite racine n_1 donne seule un équilibre stable; dans la deuxième, renfermant AE et DC, les deux racines n_1 et n_2 donnent des équilibres stables. L'équation de cette courbe est

$$S(n_2) = 0.$$

Elle s'obtient en égalant à zéro le résultant de $E(n)$ et $S(n)$. On trouve, en remplaçant $\cos\theta$ par x et s^2 par y ,

$$(S) \quad 16x^2(1+x^2)y^2 + 8x(5x^4 - 5x^2 - 1)y + 3(1+x^2)^2(1-x^2) = 0.$$

De même qu'on a limité la région du plan où s'étend la courbe (S) par la courbe (C) de réalité des racines de $E(n)$, on peut la limiter aussi par la courbe de réalité des racines de $S(n)$. Cette courbe a pour équation

$$(S_1) \quad y = \frac{3}{4} \frac{x}{1+2x^2}.$$

La partie utile en est représentée sur la figure en traits pointillés.

⁽¹⁾ Dans tout ce qui suit, on désignera toujours par n_1 la plus petite des deux racines, c'est-à-dire la plus grande en valeur absolue, savoir :

$$n_1 = \frac{-2s}{3\sin\theta} - \sqrt{\frac{4s^2}{9\sin^2\theta} - \frac{2}{3\cos\theta}}.$$

On a calculé les coordonnées du point B correspondant au maximum de y et celles du point d'intersection F des courbes (\mathcal{E}) et (S_1), savoir

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad & x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & y = \frac{3\sqrt{2}}{16}, \\ \text{(F)} \quad & x = 0,917, & y = 0,258. \end{aligned}$$

Ainsi la courbe (S) est confinée dans le petit triangle curviligne AFD. Pour la tracer assez exactement, il suffit d'avoir les tangentes en A et D et la tangente verticale.

En A la courbe (S) est tangente à la courbe (\mathcal{E}); le coefficient angulaire de la tangente est -3 ; en D, la tangente à la courbe (S) est horizontale. Sans insister sur ces déterminations qui ne présentent aucune difficulté, je passe à la recherche de la tangente verticale.

La courbe (S) peut être construite en résolvant l'équation qui la représente par rapport à y . La condition de réalité des racines est

$$16x^2(5x^4 - 5x^2 - 1)^2 - 16x^2(1+x^2) \cdot 3(1+x^2)^2(1-x^2) > 0.$$

Je divise par $16x^2$, et je remplace x^2 par t ; j'obtiens

$$F(t) = 28t^4 - 44t^3 + 15t^2 + 4t - 2 > 0.$$

On vérifie bien que $F(t)$ a une racine comprise entre zéro et un, car $F(0)$ est négatif et $F(1)$ est positif. Comme nous savons, par ce qui précède, que cette racine (répondant à la tangente verticale cherchée) est comprise entre 0,8 et 1, il est naturel de poser

$$t = 1 + u.$$

L'équation en u aura une racine négative comprise entre 0 et $-0,2$. Voici le calcul de l'équation en u par la méthode que j'ai exposée

en 1890 ⁽¹⁾ :

+28	-44	+15	+ 4	-2
	+28	-16	- 1	+3
+28	-16	- 1	+ 3	<u>+1</u>
	+28	+12	+11	
+28	+12	+11	<u>+14</u>	
	+28	+40		
+28	+40	<u>+51</u>		
	+28			
+28	<u>+68</u>			
	+28			
<u>+28</u>				

De ce calcul il résulte, pour l'équation en u ,

$$28u^4 + 68u^3 + 51u^2 + 14u + 1 = 0.$$

Cette équation n'a aucune racine positive, puisqu'elle n'a pas de variation. C'est certainement la plus petite racine négative qui convient; je suis conduit à poser $u = \frac{1}{v}$ et à chercher la racine en v qui est de module maximum. Voici ce calcul, par la méthode que j'ai exposée dans une de mes thèses ⁽²⁾ :

2°	+1	+14	+51	+68	+28
		+ <u>2.196</u>	+ <u>3.2600</u>	+ <u>3.4625</u>	+ <u>5.613</u>
		- 102	- 1904	- 2855	
			+ 56		
2 ¹	+1	+ <u>1.94</u>	+ <u>2.752</u>	+ <u>3.1770</u>	+ <u>2.784</u>
		+ <u>3.8836</u>	+ <u>5.565</u>	+ <u>6.313</u>	
		- 1504	- 3327	- 118	
			+ 16		
2 ²	+1	+ <u>3.7332</u>	+ <u>5.234</u>	+ <u>6.195</u>	+ <u>5.613</u>
		+ <u>10.537</u>			
				

⁽¹⁾ Thèse pour le Doctorat. Voir aussi : *Méthode pratique pour la résolution numérique des équations*, Nony, 1896.

⁽²⁾ *Ibid.*

La plus grande racine est visiblement *séparée* et la dernière transformée donne pour cette racine ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} +\nu^4 &= \overset{+}{\mathfrak{3}}.7332 \\ \log \nu^4 &= 3,86522 & \log(-u) &= \bar{1},0337, \\ \log(-\nu) &= 0,9663 & -u &= 0,10807. \end{aligned}$$

Je vérifie cette solution en substituant dans l'équation en u , ainsi :

$$\begin{array}{rcccccc} +28 & +68 & +51 & +14 & +1 & \\ & - 3,025 & - 7,02 & - 4,752 & -0,9996 & \\ \hline +28 & +64,975 & +43,98 & + 9,248 & \underline{+0,0004} & \end{array}$$

La vérification se fait bien ; le résidu 0,0004 est négligeable par rapport au terme $14u = 1,5 \dots$, par exemple. On peut dire que $u = -0,10807$ est une solution qui *satisfait à l'équation avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{2}$ millième* ⁽²⁾.

J'appelle l'attention sur ce fait que j'ai reproduit fidèlement la minute du calcul, sans omettre un seul chiffre, les opérations étant faites à la règle à calcul.

Ainsi, nous trouvons

$$u = 1 - t = -0,10807,$$

d'où l'on déduit

$$t = x^2 = 0,89193, \quad x = 0,944 = \cos \theta; \quad \theta = 19^\circ, 33.$$

Pour cette valeur de x^2 , les deux valeurs de y sont égales à la racine carrée de leur produit, qui est $\frac{3(1+x^2)(1-x^2)}{16x^2} = 0,0430$. On en déduit

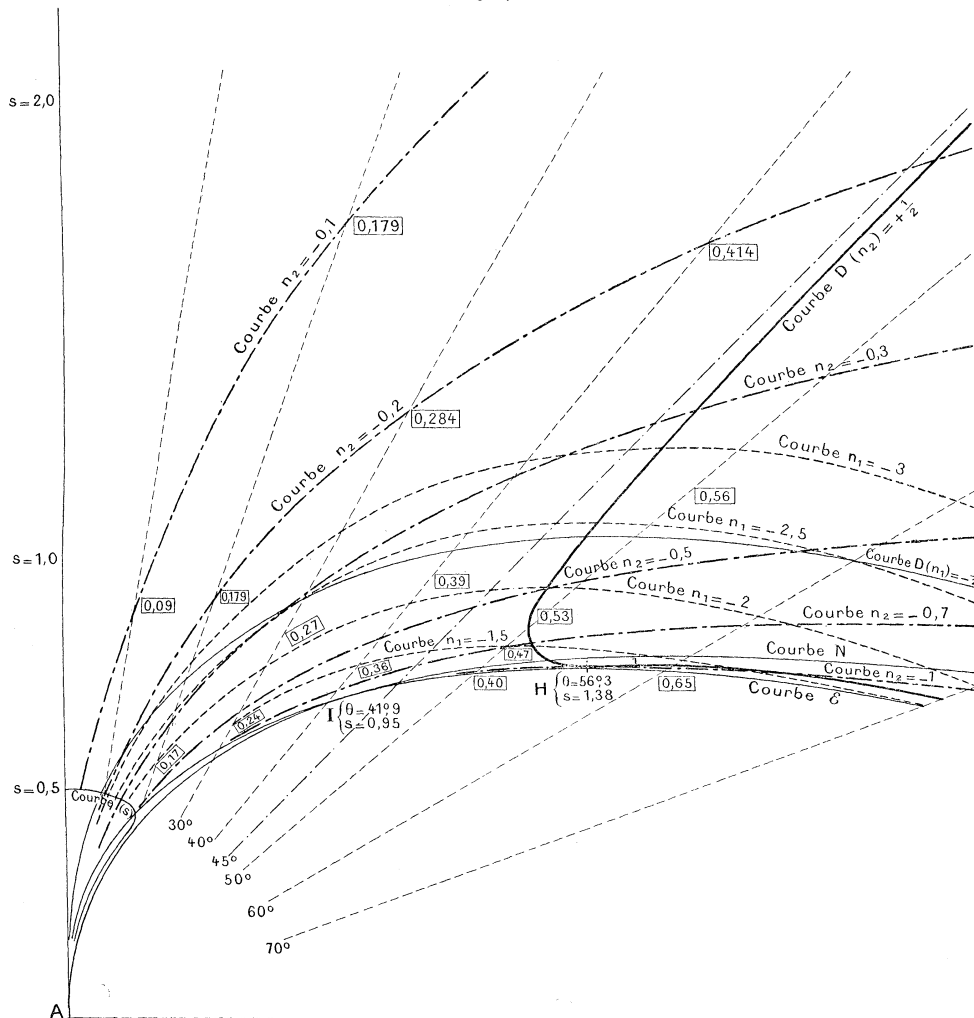
$$y = 0,2073 = s^2; \quad s = 0,4656.$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

⁽²⁾ *Ibid.*

13. *Discussion de la tendance au dérapage D (fig. 4).* — Pour la commodité de la discussion, je prendrai pour variables indépendantes, non plus θ et s , mais θ et n , et je suivrai la variation simultanée de s et D . Seulement, dans la pratique, c'est la vitesse de marche s qui paraît naturellement

Fig. 4.



donnée; de plus, il est bon de représenter l'angle θ lui-même. Je suis ainsi conduit à prendre des coordonnées polaires dont θ sera l'angle polaire et s le rayon vecteur. On tracera les courbes $n = \text{const.}$, en trait mixte pour

la plus grande racine de l'équation (E), $n_2 > -\sqrt{\frac{2}{3 \cos \theta}}$; en trait interrompu pour la plus petite, $n_1 < -\sqrt{\frac{2}{3 \cos \theta}}$. Enfin, chaque point calculé portera, en cote encadrée, la valeur de D correspondante aux courbes n_2 (fig. 4).

L'équation d'équilibre

$$(E) \quad 3n^2 \sin \theta + 4sn + 2 \operatorname{tang} \theta = c$$

donne pour s la valeur

$$(E') \quad s = -\left(\frac{3}{4}n \sin \theta + \frac{1}{2n} \operatorname{tang} \theta\right).$$

L'étude de cette fonction, quand θ est constant, est élémentaire; elle présente un minimum quand les deux termes sont égaux, savoir pour

$$n_0 = -\sqrt{\frac{2}{3 \cos \theta}}, \quad s_0 = \operatorname{tang} \theta \sqrt{\frac{3 \cos \theta}{2}}.$$

Les valeurs de n inférieures à n_0 correspondent à la racine n_1 de l'équation (E); les autres correspondent à n_2 .

La valeur (E') de s , portée dans l'expression de la tendance au dérapage

$$(D) \quad D = -n^2 \sin \theta - sn,$$

donne

$$(D') \quad D = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \theta - \frac{1}{4} n^2 \sin \theta.$$

Pour $\theta = \text{const.}$, le sens des variations de s et D, avec la distinction des racines n_1 et n_2 , est résumé dans le Tableau suivant :

n	0	n_2	$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$	$-\sqrt{\frac{2}{3 \cos \theta}} = n_0$	n_1	$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$	$-\infty$
s	$+\infty$	n_2	$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$	$\operatorname{tang} \theta \sqrt{\frac{2}{3 \cos \theta}} = s_0$	n_1	$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$	$+\infty$
D	$\frac{1}{2} \operatorname{tang} \theta$	n_2	$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$	$\frac{1}{3} \operatorname{tang} \theta$	n_1	$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$	$-\infty$

Veut-on, par les formules (E'), (D'), construire la courbe $D = \frac{1}{2}$, par exemple? Les valeurs de θ se classent en trois groupes, indiqués par les intervalles du Tableau ci-dessus :

$$\text{Premier cas : } \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \tan \theta \quad \text{ou} \quad \theta < 45^\circ.$$

Le rayon vecteur θ ne rencontre pas la courbe $D = \frac{1}{2}$; le rayon $\theta = 45^\circ$ la rencontre au point $n_2 = 0$, $s = +\infty$.

$$\text{Deuxième cas : } \frac{1}{2} \tan \theta > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \tan \theta \quad \text{ou} \quad 45^\circ < \theta < 56^\circ, 3.$$

La courbe $D = \frac{1}{2}$ est traversée par le rayon vecteur θ en un point s qui correspond à une valeur de la racine n_2 donnée par la formule (D'). La valeur de s s'en déduit par l'équation (E'). Pour $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \tan \theta$ ($\theta = 56^\circ, 3$), le rayon vecteur perce la courbe $D = \frac{1}{2}$ au point H (n_0, s_0). Ce point H est le point de contact de la courbe $D = \frac{1}{2}$ avec la courbe (E) des minima de s , qui est aussi la courbe de réalité des racines n_1 et n_2 .

$$\text{Troisième cas : } \frac{1}{3} \tan \theta > \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \theta > 56^\circ, 3.$$

Le rayon θ perce la courbe $D = \frac{1}{2}$ en un point qui correspond à la racine n_1 de l'équation (E).

On voit qu'on a pu ainsi construire la courbe $D = \frac{1}{2}$; on peut d'ailleurs le faire un peu plus simplement en éliminant n entre les équations (E) et (D); on trouve

$$(D'') \quad s^2 = 2 \sin \theta \frac{\left(\tan \theta - \frac{3}{2} D \right)^2}{\tan \theta - 2 D}.$$

c.

Mais cette méthode se prête moins bien à la distinction des racines n_1 et n_2 que la précédente.

Si le coefficient de frottement est $\frac{1}{2}$, on aura à considérer, outre la courbe $D = +\frac{1}{2}$, la courbe $D = -\frac{1}{2}$; d'après notre Tableau, la deuxième courbe appartient tout entière à la racine n_1 .

16. Résumé de la discussion. Diagramme général et sa limitation pratique. — La discussion développée dans ce paragraphe est résumée sur le diagramme de la *fig. 4*. On voit que la solution n_2 ne résiste au dérapage qu'à gauche de la courbe $D(n_2) = \frac{1}{2}$; la région où l'autre solution n_1 résiste au dérapage est comprise entre la courbe $D(n_1) = \frac{1}{2}$, d'une part, et la courbe formée des deux branches, savoir : (\mathcal{E}), du point O au point H; puis la courbe $D(n_1) = \frac{1}{2}$ à partir du point H. On a en outre reporté la courbe (S) du n° 14. La figure présente ainsi le résumé complet de la discussion.

Nous allons consacrer le paragraphe suivant à quelques remarques pratiques; mais il en est une fort simple qui intéresse trop notre diagramme pour n'être pas placée ici :

Pour $s = 1$, la vitesse linéaire de marche est, en revenant aux premières variables du n° 12,

$$V = sR = \sqrt{gR};$$

soit $2^m, 40$ pour $R = 0^m, 50$. Or, les théories militaires fixent à $2^m, 27$ la vitesse du pas gymnastique. On voit ainsi que la partie utilisée du diagramme ne sortira guère du cercle $s = 1$.

§ V. — COMPLÉMENTS PRATIQUES A LA DISCUSSION DU CERCEAU.

17. Marche et pivotement. — Il y a quelque intérêt, pour le jeu du

cerceau, à distinguer les cas où il marche de ceux où il pivote sur place, les premiers correspondant seuls au véritable jeu du cerceau. Cette distinction a quelque chose d'arbitraire, car il y a une continuité complète entre les deux cas extrêmes, le rapport entre la vitesse de conversion n et la vitesse de marche s pouvant prendre toutes les valeurs possibles. La définition qui nous a paru la plus naturelle est celle-ci :

Le cerceau marche quand le rayon de sa trajectoire ρ est plus grand que son propre rayon. Il pivote dans le cas contraire.

Or on a trouvé (n° 8), pour le rayon de la trajectoire, la formule

$$\rho = \frac{Rs}{n}.$$

La distinction des deux cas s'exprime donc ainsi :

- (¹) Valeur absolue de $n < s$ marche,
 Valeur absolue de $n > s$ pivotement.

Pour distinguer à ce point de vue les racines n_1 et n_2 de l'équation d'équilibre (n° 15),

$$(E) \quad 0 = E(n) = n^2 + \frac{4s}{3 \sin \theta} n + \frac{2}{3 \cos \theta},$$

je dois comparer $-s$ aux racines du polynome $E(n)$. Pour cela, je forme

$$(N) \quad E(-s) = s^2 \left(1 - \frac{4}{3 \sin \theta} \right) + \frac{2}{3 \cos \theta},$$

et je construis la courbe dont l'équation s'obtient en égalant à zéro $E(-s)$, savoir

$$(N) \quad s^2 = \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta (4 - 3 \sin \theta)}.$$

Seulement, pour ne pas prolonger l'usage d'un système qui ne parle

(¹) Les valeurs de n sont, on s'en souvient, négatives (n° 12).

pas suffisamment aux yeux, je prends des coordonnées polaires, savoir : l'angle θ pour argument et la vitesse de marche s pour rayon vecteur. Les courbes \mathcal{E} , \mathcal{S} , \mathcal{O} étant reportées dans ce nouveau système, j'obtiens la *fig. 4 bis*. La courbe (N) suit la courbe (\mathcal{E}), en restant au-dessus. Elle la touche au point I, qui a pour coordonnées

$$\theta = \arcsin \frac{2}{3} = 41^{\circ},9,$$

$$s = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 0,95.$$

$E(-s)$ est négatif pour les points situés au-dessus de la courbe (N) et positif au-dessous. Pour ce dernier cas, on compare $-s$ à la demi-somme des racines de $E(n)$ et l'on arrive, en définitive, aux conclusions suivantes :

Au-dessus de la courbe (N), on a	$-n_2 < s < -n_1,$
Entre les courbes (N) et (\mathcal{C}), du point O au point I . . .	$s < n_2 < -n_1,$
» au delà du point I	$-n_2 < -n_1 < s.$

D'après ces résultats et en remarquant que la partie utilisée du diagramme ne s'étend guère au delà du point I (n° 16), c'est la racine n_2 , la plus petite en valeur absolue, qui est utilisée dans le jeu normal du cerceau. La courbe $D(n_1) = -\frac{1}{2}$ devient inutile quand on se borne à cette solution (n° 15). Quant à la courbe $D(n_1) = +\frac{1}{2}$, elle est en dehors des limites utiles. Cette remarque a son intérêt : elle signifie que le dérapage, si redouté des cyclistes, n'est pas à craindre dans le jeu normal du cerceau (1). D'autre part, d'après le n° 14, la solution n_2 n'est stable qu'en dehors de la courbe (S).

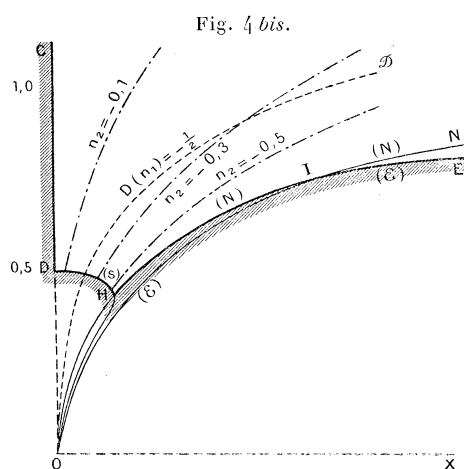
En résumé, la solution n_2 , seule intéressante pour la *marche* du cerceau, est acceptable toutes les fois que le point (s, θ) est compris dans la région du plan CDHIE (*fig. 4 bis*).

(1) La cause de cette différence est simple : pour le cycliste, effectuant une conversion, à la force centrifuge des roues (due à la vitesse n) s'ajoute celle du cadre et du cavalier qui est beaucoup plus grande.

17 bis. *Intersection des courbes (S) et (N).* — Comme complément d'information, il nous a paru intéressant de préciser les positions relatives des courbes (S) et (N). La courbe (N) pénètre à l'intérieur de la courbe (S) au point

$$H \begin{cases} \theta = \text{arc sin } 0,322 = 18^{\circ}, 8, \\ s = 0,474. \end{cases}$$

Le calcul de ce point serait bien difficile en cherchant les solutions com-



munes aux équations des deux courbes ; il devient relativement aisé par l'artifice que voici : La courbe (S) est définie par les deux équations simultanées

$$E(n_2) = 0, \quad S(n_2) = 0 \quad (\text{n}^{\circ} 14).$$

D'autre part, (N) a pour équation

$$E(-s) = 0;$$

et la quantité $-s$ se trouve justement être égale à la racine n_2 dans la région qui nous occupe. Il en résulte que les points communs à (S) et (N) sont fournis par les solutions communes à

$$E(-s) = 0, \quad S(-s) = 0.$$

Entre ces équations, linéaires en s^2 , on a éliminé s^2 et obtenu une équation du troisième degré en $\sin\theta$. Cette équation, dont une seule racine est comprise entre 0 et 1, a été résolue par la méthode employée au n° 14; on a trouvé

$$\theta = 18^{\circ},8; \quad s = 0,474.$$

A tous ces renseignements, j'ai pensé intéressant d'ajouter, en trait mixte, sur la *fig. 4 bis* les courbes (E) qui correspondent aux valeurs de n_2 égales à $-0,1$, $-0,3$ et $-0,5$. La *fig. 4 bis* permet alors de se rendre compte entièrement des circonstances du jeu du cerceau.

18. Stabilité pratique. — La *fig. 4 bis* résume la discussion. Or l'arc de courbe DH peut être grossièrement assimilé à un cercle de rayon $OD = 0,5$ de $\theta = 0^{\circ}$ à $\theta = 18^{\circ},8$ (argument du point H, *fig. 4 bis*). La condition pour qu'il existe un état d'équilibre stable est, en se rappelant le changement de variable du n° 12,

$$\frac{s}{\sqrt{\frac{g}{R}}} \geq 0,5;$$

soit, pour la vitesse linéaire de marche,

$$(1) \quad sR \geq 0,5\sqrt{gR}.$$

Pour $R = 0^m,50$, on trouve $sR \geq 1,20$ (mètre-seconde), vitesse un peu inférieure à celle du pas accéléré que les théories militaires fixent à $1^m,50$ par seconde.

La condition de stabilité théorique (1) ne doit être regardée que comme une indication, bien des circonstances variables venant influencer sur la stabilité pratique : notamment, le vent et les accidents de terrain. Puis l'habileté du joueur intervient pour l'utilisation de la stabilité. La formule (1) conduit même au paradoxe que voici : D'après la formule, la vitesse limite de stabilité augmente comme la racine carrée du rayon du cerceau, loi qui ne semble guère vérifiée par la pratique du jeu. C'est que la définition

théorique de la stabilité répond mal à la notion pratique, si bien que des cas théoriquement instables peuvent être regardés comme stables et inversement. Je m'explique :

Une tige verticale, reposant par son extrémité inférieure, est dans un état d'équilibre instable; en théorie l'affirmation est absolue, aucune distinction n'est à faire; mais veut-on appliquer son adresse à maintenir la tige verticale au bout de son doigt? La question est très différente et il faut distinguer : S'agit-il d'une aiguille à coudre? Personne n'y songera; pour une canne, au contraire, chacun sait que la chose est aisée. Pour nous en rendre compte, reportons-nous à l'équation du pendule simple de longueur R , en prenant pour origine la position d'équilibre instable :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = + \frac{g}{R} \sin \theta.$$

La présence de R au dénominateur rend les déplacements angulaires lents quand R est grand. C'est le cas de la canne ou d'un objet plus allongé encore. L'équilibriste aura alors tout loisir pour corriger un léger déplacement angulaire θ par un déplacement du doigt.

C'est une circonstance analogue qui se présente dans le cerceau; car la principale force qui pousse à la chute étant la pesanteur, la première des formules du mouvement (n° 3) réduite à ses deux premiers termes s'écrit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g \sin \theta}{3R}.$$

Cette équation est de même forme que celle du pendule : quand R est grand, les vitesses de chute sont lentes et peuvent être corrigées par le jeu de la baguette. Ajoutons que la masse du cerceau étant plus grande, les causes perturbatrices ont moins d'influence sur lui.

19. *Action de la baguette dans la conversion du cerceau.* — Le cerceau étant en marche rectiligne, le joueur appuie la baguette sur une des

joues du cerceau, par exemple celle qui est à sa droite ⁽¹⁾. Le fait observé est celui-ci : Si le joueur appuie sur l'arrière, ce qui est la condition normale, le cerceau obéissant penche à gauche, prend un nouveau régime et converse à gauche. S'il appuie au sommet, les choses se passent de même, quoique moins nettement. Mais vient-il à appuyer sur l'avant? Le cerceau rebelle penche à droite et converse à droite. Ainsi, dans le premier cas et dans le second, la rotation autour de l'axe horizontal OI semble naturelle; elle semble paradoxale dans le dernier cas. Quant à la rotation autour de la verticale OK, elle est paradoxale dans tous les cas.

Pour expliquer ces particularités, je suppose que le cerceau parte de la position d'équilibre verticale et je considère les équations du mouvement complétées par des termes \mathfrak{M} et \mathfrak{M}_1 , qui viennent des moments de l'action de la baguette par rapport à OI et OK. Les équations (2) (n° 7) du mouvement deviennent

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v' = \frac{4sn \cos \theta}{3} + n^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2g \sin \theta}{3R} + \mathfrak{M}, \\ n' = \frac{-2ps}{\cos \theta} + \mathfrak{M}_1, \\ 2s' = 4ps \operatorname{tang} \theta - 3pn \cos \theta. \end{array} \right.$$

Comme il s'agit seulement de trouver le sens du phénomène, nous pouvons intégrer le système des deux premières équations en y regardant \mathfrak{M} , \mathfrak{M}_1 et s comme des constantes ⁽²⁾; on fait ainsi une opération analogue à celle du théorème de la moyenne. De plus, pour un état qui n'est pas très éloigné de l'état d'équilibre initial, ce qui a lieu dans les conversions, on peut remplacer $\cos \theta$ par 1 et $\sin \theta$ par θ , puis négliger le terme $n^2 \sin \theta \cos \theta$ (qui est du troisième ordre quand n et θ sont petits), quitte à revenir sur l'influence de ce terme. Dans ces conditions, la deuxième équation s'intègre et donne pour n la valeur

$$(3) \quad n = \mathfrak{M}_1 t - 2s\theta,$$

⁽¹⁾ Dans tout ce numéro, la droite et la gauche sont celles du joueur.

⁽²⁾ L'expérience montre d'ailleurs que s ne varie que d'une faible fraction de sa valeur.

qui, portée dans la première équation simplifiée, la transforme en celle-ci :

$$(4) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2}{3}\left[4s^2 - \frac{g}{R}\right]\theta + \frac{4s}{3}\mathfrak{N}_1 t + \mathfrak{N}.$$

Or, d'après la condition de stabilité (n° 18), le coefficient de θ est négatif. Je peux donc poser

$$(5) \quad -\frac{2}{3}\left[4s^2 - \frac{g}{R}\right] = -h^2.$$

L'équation (4) s'intègre alors et donne pour θ la valeur

$$(6) \quad \theta = \frac{4s\mathfrak{N}_1}{3h^2}t + \frac{\mathfrak{N}}{h^2} - \left[\frac{\mathfrak{N}}{h^2}\cosh ht + \frac{4s\mathfrak{N}_1}{3h^3}\sin ht\right].$$

Enfin, si l'on reporte cette valeur de θ dans l'expression (3) de n , celle-ci devient, en tenant compte de la formule (5),

$$(7) \quad n = \frac{-2g}{3Rh^2}\mathfrak{N}_1 t - \frac{2s\mathfrak{N}}{h^2} + 2s\left[\frac{\mathfrak{N}}{h^2}\cosh ht + \frac{4s\mathfrak{N}_1}{3h^3}\sin ht\right].$$

Pour examiner la question de signe qui nous occupe, je mets l'expression (6) de θ sous la forme

$$(6') \quad \theta = \frac{4s\mathfrak{N}_1}{3h^3}[ht - \sin ht] + \frac{\mathfrak{N}}{h^2}[1 - \cosh ht].$$

Sous cette forme, on reconnaît que le premier terme a le signe de \mathfrak{N}_1 et le second, le signe de \mathfrak{N} . Notre hypothèse étant que la baguette est appuyée sur la joue droite et à l'arrière du cerceau, \mathfrak{N} et \mathfrak{N}_1 sont négatifs; θ est négatif, c'est-à-dire que le cerceau penche à gauche; si la baguette est appuyée au sommet, \mathfrak{N}_1 est nul et θ a le signe de \mathfrak{N} ; le cerceau penche encore à gauche. Mais il est difficile de placer la baguette exactement au sommet et le terme en \mathfrak{N}_1 peut apparaître, tantôt avec un signe, tantôt avec l'autre. Comme ce coefficient \mathfrak{N}_1 contient un terme proportionnel à t , il prend facilement la prépondérance; aussi, quand la baguette

appuie franchement sur l'avant, ne tarde-t-il pas à donner son signe $+$ à θ et le cerceau penche à droite. Pour n , les termes correspondent à ceux de θ avec des signes contraires, de sorte que n prendra, dans les trois cas, un signe contraire à celui de θ , ce qui est la plus importante condition pour l'équilibre (n° 12). On comprend ainsi qu'avec un peu d'habileté, le joueur puisse se rapprocher suffisamment d'un régime d'équilibre dans la conversion. Quant au terme négligé $n^2 \sin\theta \cos\theta$, outre qu'il est du troisième ordre, il a le signe de θ . Il ne fait donc qu'exagérer la vitesse de variation de θ , mais sans changer son signe.

CHAPITRE II.

MONOCYCLE.

§ I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

20. *Le problème du monocycle comparé avec celui du cerceau.* — Le monocycle non monté est assimilable à un cerceau et sa théorie est la même. Seulement le mécanisme moteur, destiné à remplacer la baguette du cerceau, est un système de deux manivelles qui forme le pédalier et qui vient changer les moments d'inertie calculés au n° 4⁽¹⁾.

Si le monocycle est monté, le poids du cavalier, son inertie et son action sur les pédales viennent s'ajouter, dans les équations, aux quantités relatives à la roue. Mais une complication inabordable réside dans le mouvement du cavalier autour de l'axe de la roue et qui tend à le faire tomber, soit en avant, soit en arrière. C'est par des variations dans sa forme et dans l'appui emprunté aux pédales que le cavalier maintient,

(¹) Dans cette explication, j'envisage le monocycle qui a été employé par le cycliste du Nouveau Cirque en 1895-1896. On a pu voir dans les rues de Paris un système de monocycle qui semble différent au premier abord, parce qu'il est muni d'une selle et d'un guidon. Mais leur ensemble est mobile autour de l'axe de la roue et n'a pour but que de permettre au cavalier d'être assis et de reposer directement sur l'axe, sans que tout son appui soit pris par les pieds sur les pédales. Cette disposition n'a aucun intérêt pour la théorie qui nous occupe.

autour de l'axe de la roue, son équilibre instable. La dynamique des êtres vivants est trop complexe pour que l'on puisse tenter de résoudre cette partie de la question. Nous remplacerons donc l'habileté du cavalier par une liaison capable de maintenir son centre de gravité sur la ligne de plus grande pente qui passe par le centre de la roue.

Le problème demeure encore peu abordable à cause des difficultés que les déformations du cavalier ⁽¹⁾ opposent au calcul des forces d'inertie : il faudra, dans ce calcul, traiter le cavalier comme un solide invariable. Les axes de coordonnées, les notations et conventions générales seront les mêmes que pour le cerceau (n° 1), avec les quelques modifications que voici :

21. Constantes du cavalier. — Un élément quelconque de masse m appartenant au cavalier est défini par ses coordonnées ξ, η, ζ par rapport au système d'axes $Oijk$. Je poserai, pour définir le cavalier, au point de vue dynamique,

$$\begin{aligned} \Sigma m &= \mu, \\ \Sigma m \xi &= 0, & \Sigma m(\eta^2 + \zeta^2) &= A, & \Sigma m \eta \zeta &= 0, \\ \Sigma m \eta &= 0, & \Sigma m(\zeta^2 + \xi^2) &= B, & \Sigma m \zeta \xi &= L, \\ (2) \quad \Sigma m \zeta &= \mu z, & \Sigma m(\xi^2 + \eta^2) &= C, & \Sigma m \xi \eta &= 0. \end{aligned}$$

Les trois coefficients nuls $\Sigma m \eta, \Sigma m \eta \zeta, \Sigma m \xi \eta$ expriment la symétrie par rapport au plan moyen du cycle. La condition $\Sigma m \xi = 0$ exprime l'équilibre du cavalier autour de l'axe de la roue.

Les lettres μ, A, B, C , déjà employées dans la théorie du cerceau, seront nécessaires aussi pour désigner les éléments correspondants de la roue. Afin d'éviter les confusions, nous les affecterons d'indices quand elles désigneront des éléments relatifs à la roue.

22. Application du principe des travaux virtuels. — Avec les simplifications adoptées, le monocycle monté est assimilé à un système de corps

(1) Notamment la flexion et le développement des jambes accompagnant le pédalier.

(2) z est la cote du centre de gravité du cavalier, comptée sur Ok ; à partir du n° 39, elle sera désignée par h .

solides dont le degré de liberté est 3, le déplacement virtuel résultant, comme pour le cerceau (n° 3), des trois composantes de la rotation virtuelle de la roue

$$\delta\Omega = I \delta p + K \delta n + j \delta s,$$

composantes que j'appellerai encore *mouvements de chute, de conversion et de marche*. Je donnerai les mêmes qualificatifs aux équations que fournissent ces trois déplacements. Tandis que la rotation $\delta\Phi = I \delta p + K \delta n$ entraîne le cavalier avec la roue et donne à l'un quelconque de ses points M le déplacement

$$| \delta\Phi(\mathbf{M} - \mathbf{O}),$$

la rotation $j \delta s$ lui imprime seulement une translation égale à celle du centre de la roue, savoir

$$| j \delta s(\mathbf{S} - \mathbf{O}) = \mathbf{IR} \delta s.$$

Au contraire, tout point M, de la roue est entièrement entraîné par la rotation $\delta\Omega$ et reçoit le déplacement

$$| \delta\Omega(\mathbf{M}_1 - \mathbf{O}).$$

De là résulte que le travail virtuel de l'accélération d'un point quelconque est :

$$\text{Pour la roue} \dots \dots \left[\frac{d^2 \mathbf{M}_1}{dt^2} \cdot \delta\Omega \cdot (\mathbf{M}_1 - \mathbf{O}) \right],$$

$$\text{Pour le cavalier} \dots \dots \left[\frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \cdot \delta\Phi \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{O}) \right] + \left[\frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \cdot j \delta s \cdot (\mathbf{S} - \mathbf{O}) \right],$$

les crochets désignant, suivant la notation de Grassmann, les volumes des parallélépipèdes construits sur les trois vecteurs qu'ils renferment.

D'autre part, les travaux des forces appliquées sont, pour la force motrice du pédalier, le produit

$$\mathfrak{M} \delta s$$

du moment moteur par la rotation; pour la pesanteur, le travail virtuel

est

$$(\mu z + \mu_1 R) g \sin \theta \cdot \delta p.$$

D'après les évaluations ainsi trouvées, les trois équations du mouvement sont

$$(1) \begin{cases} (p) \quad \left[I \sum m(\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \right] + \left[I \sum m_1(\mathbf{M}_1 - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}_1}{dt^2} \right] = (\mu z + \mu_1 R) g \sin \theta, \\ (n) \quad \left[K \sum m(\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \right] + \left[K \sum m_1(\mathbf{M}_1 - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}_1}{dt^2} \right] = 0, \\ (s) \quad \left[j \sum m(\mathbf{S} - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \right] + \left[j \sum m_1(\mathbf{M}_1 - \mathbf{O}) \frac{d^2 \mathbf{M}_1}{dt^2} \right] = \mathfrak{R}. \end{cases}$$

Le calcul des termes de la seconde colonne rentre dans le cas du cerceau traité au n° 6, nous n'en reparlerons pas. Pour le calcul des termes de la première colonne, on peut tenter une simplification analogue à celle du n° 6; mais l'avantage d'une telle simplification n'est pas bien net : mieux vaut faire le calcul sans artifice de la façon que je vais expliquer.

25. Travaux virtuels des forces d'inertie du cavalier. — Pour avoir l'accélération $\frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2}$ d'un point \mathbf{M} du cavalier, je pars de l'expression de la vitesse qui est, d'après ce qui précède,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = I\mathbf{R}s + |\Phi \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{O})|.$$

La dérivée de cette vitesse est l'accélération

$$\frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} = I\mathbf{R}s' + I'\mathbf{R}s + |\Phi'(\mathbf{M} - \mathbf{O}) + |\Phi \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{M} - \mathbf{O})|.$$

Dans cette formule, je dois remplacer I' et Φ' par leurs valeurs (4) et (6) trouvées au n° 3, savoir

$$I' = Jn, \quad \Phi' = Ip' + Kn' + Jpn.$$

Enfin la vitesse $\frac{d}{dt}(\mathbf{M} - \mathbf{O})$, due à la seule rotation Φ , doit être remplacée par sa valeur

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M} - \mathbf{O}) = |\Phi(\mathbf{M} - \mathbf{O}).$$

L'expression de $\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2}$ ainsi obtenue doit être portée dans les équations (n) , (p) , (s) du mouvement. Il faut, pour terminer le calcul, remplacer le vecteur $(\mathbf{M} - \mathbf{O})$ par son expression rapportée au système $\mathbf{I}jk$

$$\mathbf{M} - \mathbf{O} = \mathbf{I}\xi + j\eta + k\zeta.$$

Ces substitutions faites, il ne reste qu'à développer, dans les équations (n) , (p) , (s) , chaque crochet par la règle de multiplication des polynomes et à remplacer chaque produit vectoriel par sa valeur, qui est celle du volume du parallélépipède correspondant, par exemple

$$[\mathbf{I}jk] = +1, \quad [\mathbf{II}j] = 0, \quad [\mathbf{I}j\mathbf{K}] = +\cos\theta.$$

La considération des produits nuls permet de simplifier les écritures en évitant de les écrire; c'est ainsi que dans le troisième crochet (s) (n° 22), $\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2}$ peut être remplacé par sa seule composante suivant \mathbf{I} , parce que le crochet contient déjà le facteur j en évidence et le facteur k dans $(\mathbf{S} - \mathbf{O})$. Les écritures n'en restent pas moins assez fastidieuses pour que je croie à propos de les épargner au lecteur. Les résultats sont ceux-ci :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \left[\mathbf{I} \sum m(\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2} \right] \\ \quad = \mathbf{A}p' - \mathbf{L}n' \cos\theta - \mu\mathbf{R}z \cdot sn \cos\theta + (\mathbf{C} - \mathbf{B})n^2 \sin\theta \cos\theta, \\ \left[\mathbf{K} \sum m(\mathbf{M} - \mathbf{O}) \frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2} \right] \\ \quad = (\mathbf{C} \cos^2\theta + \mathbf{B} \sin^2\theta)n' + \mu\mathbf{R}z \cdot s' \sin\theta \\ \quad \quad - \mathbf{L}p' \cos\theta + 2(\mathbf{B} - \mathbf{C})pn \sin\theta \cos\theta + \mathbf{L}p^2 \sin\theta, \\ \left[j \sum m(\mathbf{S} - \mathbf{O}) \frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2} \right] \\ \quad = \mu\mathbf{R}^2 s' + \mu\mathbf{R}z(n' \sin\theta + 2pn \cos\theta). \end{array} \right.$$

24. *Équations du mouvement du monocycle.* — Des résultats du n° 6, on déduit, pour les termes de la deuxième colonne des équations (1) (n° 22) des travaux virtuels, les valeurs

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[I \sum m_i (M_i - O) \frac{d^2 M_i}{dt^2} \right] \\ \quad = A_i p' - B_i \cdot sn \cos \theta + (C_i - B_i) n^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \left[K \sum m_i (M_i - O) \frac{d^2 M_i}{dt^2} \right] \\ \quad = (C_i \cos^2 \theta + B_i \sin^2 \theta) n' + B_i \cdot s' \sin \theta \\ \quad \quad + 2(B_i - C_i) pn \sin \theta \cos \theta + (B_i - \mu_i R^2) ps \cos \theta, \\ \left[J \sum m_i (M_i - O) \frac{d^2 M_i}{dt^2} \right] \\ \quad = B_i \cdot s' + B_i n' \cdot \sin \theta + (B_i + A_i - C_i) pn \cos \theta. \end{array} \right.$$

Ces valeurs (3) doivent être ajoutées respectivement aux valeurs (2) du n° 23; les sommes, portées dans les équations (1) du n° 22, donnent les équations complètes du mouvement. Pour simplifier les écritures de ces équations, sans charger le sujet de notations nouvelles, je remarque que les termes des formules correspondantes (2) et (3) qui sont écrits dans les mêmes colonnes sont des termes semblables qui se réduisent entre eux : par exemple, le coefficient de p' , dans la somme des premières équations de ces formules, est $A + A_i$. Or la masse de la roue est faible devant celle du cavalier, et A_i est faible devant A ; il est bien certain même que A varie, d'un cavalier à un autre, d'une quantité supérieure à A_i ; il n'y a donc aucun inconvénient à désigner encore la somme $A + A_i$ par la lettre A . En appliquant cette simplification des écritures à tous les termes, les équations du mouvement s'écrivent

$$(p) \quad Ap' - Ln' \cos \theta - \mu Rz \cdot sn \cdot \cos \theta + (C - B) n^2 \sin \theta \cos \theta = \mu z g \sin \theta,$$

$$(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n' + \mu Rz s' \sin \theta - L p' \cos \theta \\ \quad + 2(B - C) pn \sin \theta \cos \theta + L p^2 \sin \theta + (B_i - \mu_i R^2) ps \cos \theta = 0, \end{array} \right.$$

$$(s) \quad \mu R^2 s' + \mu Rz n' \sin \theta + 2 \mu Rz \cdot pn \cos \theta = \mathcal{N}.$$

§ II. — MARCHE DU CYCLE.

25. *Étude de l'équation de marche (s).* — L'équation est dominée par le terme \mathfrak{M} qui figure au second membre et dépend du caprice du cavalier. L'intérêt de cette équation est donc seulement de faire connaître l'effort qu'il faut fournir pour obtenir une marche déterminée.

Dans un état de régime, s' et n' sont nuls; p l'est aussi, de sorte que l'équation (s) donne le résultat assez évident $\mathfrak{M} = 0$, qu'on aurait pu déduire du théorème des forces vives. En réalité, \mathfrak{M} ne doit pas être nul, mais suffisant pour vaincre les résistances passives, fournir ainsi aux pertes d'énergie mécanique et entretenir la vitesse de marche s . Dans le cas d'une montée ou d'une descente, cas qui n'a pas été envisagé dans la mise en équations, on doit encore faire entrer en ligne de compte le travail de la pesanteur dans le déplacement δs , travail qui cesse d'être nul quand la trajectoire a une pente. Soit i l'angle de montée de la trajectoire; le cycle, avançant de $R \delta s$, monte de $R \delta s \operatorname{tang} i$; son poids étant μg , son travail résistant est

$$\mu g \cdot R \delta s \operatorname{tang} i.$$

Ainsi, le second membre de l'équation (s) doit être remplacé par $\mathfrak{M} - \mu g \cdot R \operatorname{tang} i$, et le moment moteur \mathfrak{M} que le cavalier doit fournir au pédalier est

$$\mathfrak{M} = \mu g R \operatorname{tang} i.$$

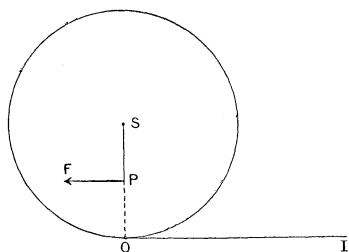
\mathfrak{M} a le signe de i , c'est-à-dire que le cavalier doit pousser ou retenir suivant qu'il gravit une pente ou la descend.

Hors le cas de régime, le premier membre de l'équation (s) n'est plus nul; mais le premier terme l'emporte de beaucoup sur les deux autres, à cause du facteur $n' \sin \theta$ pour le second, et $p n$ pour le troisième. Le premier membre peut ainsi être réduit au terme $\mu R^2 s'$, qui est le produit de deux facteurs: le premier $\mu R s'$ est l'inertie du cycle; le second R est le

déplacement du centre de gravité pour $\delta s = 1$, de sorte que le terme $-\mu R^2 s'$ est le travail de l'inertie du cycle. L'équation (s) simplifiée est ainsi assez évidente; mais il fallait les calculs précis du § I pour déceler l'existence des deux autres termes, qui n'ont guère d'ailleurs qu'un intérêt théorique.

26. *Paradoxe de la marche du cycle.* — Le cycle S (*fig. 5*) repose debout sur le sol, la pédale P au bas de sa course. Un observateur tire la

Fig. 5.



pédale P dans le sens du mouvement de marche, c'est-à-dire vers l'arrière; s'il n'est pas familiarisé avec la mécanique, il peut s'attendre à voir la pédale, obéissant à sa traction, tourner autour de S dans le sens des aiguilles d'une montre et le cycle marcher en avant, dans le sens OI. C'est le mouvement opposé qui se produit. L'expérience peut être réalisée avec tout appareil vélocipédique : bicyclette, bicycle, tandem, etc. Elle est même plus trompeuse, partant plus piquante, avec ces appareils qu'avec le monocycle, parce que le système de transmission, compliquant l'appareil, dissimule la raison des choses. Mais, à cela près, l'explication est la même que celle que je vais donner pour le monocycle.

Soit δs la rotation virtuelle du cycle, comptée positivement dans le sens de la marche. Le déplacement du centre S est dirigé suivant OI, égal à $R \delta s$. Le déplacement relatif du point P est $-SP \cdot \delta s$, de sorte que le déplacement absolu est, suivant OI,

$$(R - SP) \delta s = + OP \delta s.$$

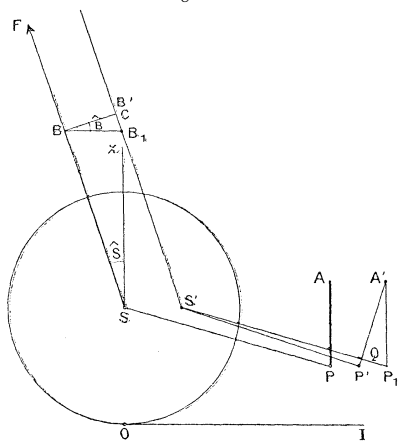
Le travail virtuel de la force motrice $-F$ est donc

$$-F \times OP \delta s.$$

Il est négatif quand δs est positif; cela suffit pour montrer que la tendance au mouvement est vers l'arrière et non pas vers l'avant. Pour voir la chose avec évidence, dans le cas du monocycle, il suffit de considérer que la roue, avec ses pédales, forme une figure invariable dont le centre instantané est le point O . Il est visible alors que la force F tend à un roulement de droite à gauche et à un mouvement de recul. Mais, dans le cas de la bicyclette, cette explication si simple n'est plus possible, et le paradoxe est plus trompeur; elle se prête à une expérience un peu plus intéressante que nous allons examiner.

26 bis. *Expérience sur la bicyclette.* — A la pédale P , au bas de sa course (*fig. 6*), on attache une ficelle; on la fait passer sous l'axe S de la

Fig. 6.



roue d'arrière; enfin on exerce sur le brin libre B une traction BF , suivant des inclinaisons diverses. Si l'on tire franchement vers l'arrière, la bicyclette recule; si l'on tire vers l'avant ou seulement vers le haut, la bicyclette avance. Entre la traction vers l'arrière et la traction verticale, il y a une position inclinée où la traction laisse la bicyclette immobile. Pour

calculer cet angle, on devra écrire qu'une rotation δ de la pédale produit un travail nul de la traction F , c'est-à-dire un déplacement nul de son point d'application dans la direction du fil. Soient S la roue d'arrière, AP la manivelle dont le centre est en A et la pédale en P ; PSB est le fil. Par le déplacement δ , la figure vient en $A'P'S'B'$. Soient P_1 la nouvelle extrémité inférieure de la trajectoire de la pédale, m le rayon AP de la manivelle et M un coefficient qui ne dépend que de la multiplication de la machine; on a

$$(1) \quad P_1P' = m\delta, \quad SS' = M\delta.$$

Soient encore BC la perpendiculaire abaissée de B sur $S'B'$, et BB_1 la parallèle à SS' ; CB' est le déplacement du point B dans la direction de la force; s'il est de même sens que F , le déplacement δ tend à se produire; si CB' est de sens contraire à F , c'est le déplacement contraire qui se produit; l'équilibre a lieu quand le point B' coïncide avec C . Pour mettre ces conditions en formules, j'ai successivement

$$(2) \quad B_1C = BB_1 \sin \hat{B} = SS' \sin \hat{S} = M\delta \sin \hat{S}.$$

D'autre part, l'allongement B_1B' du brin libre égale la diminution du brin SP , laquelle a pour valeur la projection P_1Q de P_1P' sur P_1S' . Ce segment a pour expression

$$(3) \quad B_1B' = P_1Q = P_1P' \cos P' \hat{P}_1S' = m\delta \sin(\hat{P}, \hat{I}).$$

Des formules (2) et (3) il résulte que la distance zénithale \hat{S} du fil qui répond à l'équilibre est donnée par la formule

$$M \sin \hat{S} = m \sin(\hat{P}, \hat{I}),$$

d'où l'on tire

$$\sin \hat{S} = \frac{m}{M} \sin(\hat{P}, \hat{I}).$$

C'est une constante de la machine qui ne dépend que de sa forme géométrique.

L'expérience de la bicyclette et son explication montrent que, quand la force exercée sur les pédales est une force *intérieure*, quand elle vient du cavalier, par exemple, le cycle avance. La force est, en effet, accompagnée d'une réaction qui annule le travail total provenant de la translation d'ensemble du cycle; il reste seulement le travail de la force appliquée à la pédale dans le mouvement relatif.

27. *Paradoxe du navire. — Halage.* — Il me paraît à propos de rapprocher du cas précédent un autre paradoxe qui m'a été proposé autrefois par un ingénieur des Ponts et Chaussées et qui vise la navigation contre le vent.

Armez un navire d'un anémomètre quelconque, d'un moulin à vent, par exemple. Si ce moteur actionne une hélice, le bateau se met en marche; mais, puisque le vent est contraire, la marche augmente la force du vent, si bien que, non seulement le bateau marchera contre le vent, mais même sa puissance motrice augmentera par sa propre marche.

La faute est rendue manifeste par ce qui précède : Il est bien vrai que le bateau pourra se mettre en marche contre le vent, pourvu toutefois que le rapport des organes soit tel que le travail du vent soit positif dans la marche en-avant. Or le vent a pour point d'application principal l'aile du moulin qui est normale au vent, et le déplacement de l'aile résulte de sa rotation relative et de la translation générale du navire. Ce déplacement résultant de l'aile doit être vers l'arrière pour que le vent travaille positivement. Ainsi, la puissance motrice du vent sera, en réalité, diminuée et non pas augmentée par la marche. Je n'ai pas besoin d'insister sur les autres causes qui s'opposent à la marche, notamment l'action directe du vent sur la masse générale du bateau.

Les mêmes idées suggèrent un système qui pourrait remplacer le halage et qui emprunte à la rivière même la puissance motrice : Imaginez un moulin à eau dont la roue est verticale et fixée à l'axe horizontal de la

roue un pignon denté. Faites enfin reposer le pignon sur une crémaillère établie au-dessus de la rivière : la roue remontera la rivière et pourra remorquer un chaland.

23. *Réflexions sur le pédalier.* — Quoique l'étude des organes moteurs sorte du cadre de ce travail, j'indiquerai, comme se rattachant à l'équation de marche, les principales considérations qui me semblent devoir guider dans la recherche des perfectionnements du pédalier :

Il est reconnu que le cavalier, surtout lorsqu'il est inhabile ou fatigué, laisse toujours le pied peser quelque peu sur la pédale qui remonte. De là une fatigue inutile. Un encliquetage qui permettrait au pied ascendant de ne pas s'opposer à la marche par un peu de lenteur serait un progrès.

Le problème de la multiplication n'est pas résolu : les uns la veulent grande, les autres la veulent plus faible. Les travaux de M. Chauveau ⁽¹⁾ sur la dépense du muscle pourraient, semble-t-il, conduire à la solution : Le muscle qui fait effort, sans déplacer le point d'application, dépense de l'énergie; cependant il ne produit pas de travail mécanique. Le muscle qui travaille seulement à donner à certains membres un mouvement alternatif, sans vaincre aucune résistance extérieure, dépense aussi de l'énergie; cependant il ne produit aucun travail mécanique utile. Entre ces deux cas extrêmes, il existe un cas intermédiaire où le rendement est maximum. La détermination de ce maximum rentre dans le cadre des recherches de M. Chauveau. Mais il n'y a guère lieu de le déterminer avec précision, tant qu'on ne possède pas une multiplication variable avec la pente du terrain.

Au même point de vue, on aperçoit dans le pédalier un défaut assez grave : Supposons, ce qui d'ailleurs n'est pas bien exact, que l'effort du cavalier soit toujours vertical. Quand la pédale est au haut de sa course, il commence à appuyer. Jusqu'à ce que la manivelle soit sensiblement horizontale, une composante importante de la pression du pied est inutile.

(1) *Comptes rendus*, t. CXXIV, n° 1; 4 janvier 1897.

Cependant elle consomme de l'énergie. Il ne semble pas très difficile d'imaginer un système pour remédier à cet inconvénient.

Si, malgré ses inconvénients et à cause de sa simplicité, on conserve le pédalier ordinaire à manivelles, on doit rechercher les meilleures conditions de son fonctionnement : elles dépendent, en première ligne, de la figure dont les éléments sont :

Le vecteur qui va de la selle au centre du pédalier ;

La longueur des manivelles.

Seule l'expérience me paraît pouvoir résoudre la question ; mais cette étude peut être faite sur un siège fixe, en dehors du cycle.

La meilleure figure étant déterminée pour un cavalier quelconque, celle qui convient à un autre cavalier s'en déduira en multipliant par le rapport des longueurs des jambes. Il est bon qu'un cycle possède ainsi un réglage, non seulement pour la selle, comme c'est la coutume, mais aussi pour les manivelles, ce qui ne se fait pas encore. Le même appareil fixe pourrait servir à la détermination de l'effort et de la vitesse des pédales qui correspond au maximum d'effet utile ; on en déduirait la multiplication la plus convenable.

§ III. — ÉQUILIBRE DU MONOCYCLE.

29. Condition d'équilibre. — Les équations du mouvement, trouvées au n° 24, sont :

$$(p) \quad Ap' - Ln' \cos \theta - \mu Rz sn \cos \theta + (C - B)n^2 \sin \theta \cos \theta = \mu g z \sin \theta,$$

$$(n) \quad \begin{cases} (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)n' + \mu Rz s' \sin \theta - Lp' \cos \theta \\ + 2(B - C)pn \sin \theta \cos \theta + Lp^2 \sin \theta + (B_1 - \mu_1 R^2)ps \cos \theta = 0, \end{cases}$$

$$(s) \quad \mu Rz n' \sin \theta + \mu R^2 s' + 2 \mu Rz pn \cos \theta = \mathfrak{M}.$$

Dire qu'un régime d'équilibre est établi, c'est dire que les équations sont satisfaites pour un système de valeurs constantes de s , n , θ . Dans

cette hypothèse, on a

$$o = s' = n' = p = p'.$$

L'équation (n) se réduit alors à une identité; l'équation (s) se réduit à $\mathfrak{M} = 0$, ce qui signifie que le moment moteur doit équilibrer exactement le moment des résistances passives. Enfin l'équation (p) devient

$$(E) \quad (B - C)n^2 \sin\theta \cos\theta + \mu R z s n \cos\theta + \mu g z \sin\theta = 0.$$

Telle est l'équation d'équilibre du monocycle. De même forme que celle du cerceau, elle peut aussi être établie géométriquement par la méthode du n° 11.

50. Tendence au dérapage. — Les forces qui agissent sur le cycle monté sont le poids total du cycle monté et son inertie, qu'il semble au premier abord nécessaire de décomposer en deux parties, celle de la roue et celle du cavalier; mais, on l'a remarqué au n° 10, la résultante de translation des forces d'inertie se réduit à celle du centre de gravité. Or celui-ci obéit, avec le cavalier et le centre de la roue, au seul mouvement d'entraînement expliqué au n° 22. Il en résulte que l'inertie a pour résultante celle du centre de gravité total G , de masse μ , savoir :

$$- \mu \frac{d^2 G}{dt^2} = - \mu \left[I R s' + I' R s + \Phi' (G - O) + \Phi \frac{d}{dt} (G - O) \right] \quad (\text{n° } 25).$$

Il suffit de remplacer dans cette expression I' , Φ' , $\frac{d}{dt} (G - O)$ par leurs valeurs (n° 25) pour avoir l'expression définitive de l'inertie. On obtient, en conservant les seuls termes qui nous intéressent, ceux en J et K ,

$$\left[- \mu \frac{d^2 G}{dt^2} \right]_{JK} = - \mu \{ J [R s n + z (-p' \cos\theta + p^2 \sin\theta + n^2 \sin\theta)] + K z (-p' \sin\theta - p^2 \cos\theta) \}.$$

D'autre part, le poids est $- K \mu g$. Il en résulte, pour la tendance au

dérapiage D (*cf.* n° 10), la formule

$$D = - \frac{Rns + zn^2 \sin \theta + z(p^2 \sin \theta - p' \cos \theta)}{g + z(p^2 \cos \theta + p' \sin \theta)}.$$

A l'état de régime, p et p' sont nuls, D se réduit à

$$(D) \quad D = - \frac{Rns + zn^2 \sin \theta}{g},$$

et l'on retrouve bien, en faisant $z = R$, l'expression du n° 10; mais il m'a paru intéressant de calculer ici l'expression complète de D pour avoir l'influence des termes nouveaux qu'introduit le défaut de régime, notamment dans les virages brusques.

51. Danger des virages brusques. — Dans les conditions normales, les termes prédominants de D sont Rns au numérateur et g au dénominateur. La tendance au dérapage est augmentée par le terme $-zp' \cos \theta$ du numérateur de D et par le terme $+zp^2 \cos \theta$ du dénominateur; les deux autres termes sont plus faibles; si on les néglige, l'augmentation relative de la tendance au dérapage, venant du défaut de régime, est

$$\frac{zp' \cos \theta}{-(Rns + zn^2 \sin \theta)} - \frac{zp^2 \cos \theta}{g}.$$

Pour faire une application numérique, adoptons $z \cos \theta = 0^m,98$, ce qui est une condition assez normale; le second terme atteindra la valeur 0,1 pour $p = 1$, c'est-à-dire quand la vitesse de chute sera de 57° par seconde. Le premier terme est notablement plus grand pour $p' = 1$, puisque son dénominateur doit être une fraction de g inférieure au coefficient de frottement (0,3 à 0,5). Ces termes peuvent acquérir de l'importance quand on est obligé de passer brusquement de la marche rectiligne à une conversion ou inversement, ce qui arrive dans les pistes où les virages

circulaires succèdent brusquement aux parties rectilignes. L'influence que nous venons d'étudier sur les chutes à l'entrée des virages aurait échappé à la simple analyse du n° 10.

32. Discussion des régimes d'équilibre. — L'équation d'équilibre et la tendance au dérapage

$$(E) \quad (B - C)n^2 \sin \theta \cos \theta + \mu R z sn \cos \theta + \mu g z \sin \theta = 0 \quad (\text{n}^\circ 29),$$

$$(D) \quad D = - \frac{R sn + zn^2 \sin \theta}{g} \quad (\text{n}^\circ 30)$$

sont de même forme que pour le cerceau (n° 12). Elles conduisent à la même discussion :

s et θ étant donnés, l'équation (E) donne pour n deux valeurs de signe contraire à θ ; *le cycle converge du côté où il penche* (cf. n° 12).

Construction du diagramme de la discussion (fig. 7). — Pour fixer les idées, et à titre d'exemple, j'ai construit un graphique avec les données numériques suivantes qui m'ont paru répondre à un cas moyen raisonnable. D'abord, je suppose

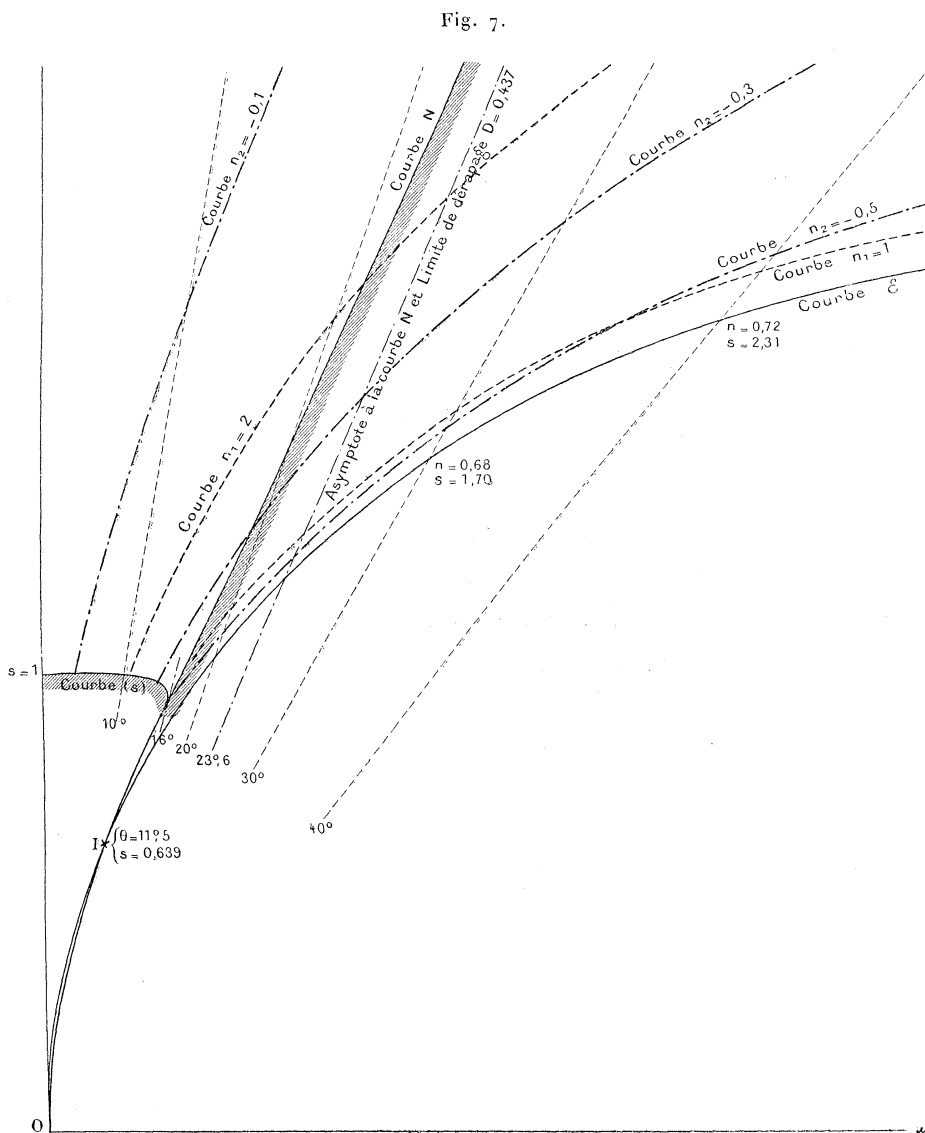
$$B - C = \mu z^2,$$

ce qui est à peu près exact en général et que j'ai toujours le droit de faire à titre de cas particulier. L'écriture de l'équation (E) est par là simplifiée; elle se simplifie encore si l'on fait le changement de variables du n° 12 qui consiste à prendre pour inconnues les rapports des vitesses s et n à $\sqrt{\frac{g}{R}}$. Ces nouvelles inconnues étant encore désignées par les mêmes lettres s et n , les formules (E) et (D) s'écrivent

$$(E) \quad \frac{\tilde{s}}{R} n^2 \sin \theta + sn + \tan \theta = 0, \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ces formules ne dépendent plus que} \\ \text{d'un paramètre numérique } \frac{\tilde{s}}{R}; \text{ je l'ai choisi} \\ \text{égal à } 2,5. \end{array} \right.$$

$$(D) \quad D = - ns - \frac{\tilde{s}}{R} n^2 \sin \theta.$$

La méthode employée pour la construction de ce graphique est celle que j'ai exposée au n° 13 pour l'étude du dérapage du cerceau : on se



donne arbitrairement θ et n ; s est calculé par la première équation; sa valeur, portée dans l'expression de D , réduit cette expression à $+\tan\theta$,

en sorte que les formules employées sont celles-ci :

$$(E) \quad s = - \left[2,5 n \sin \theta + \frac{1}{n} \operatorname{tang} \theta \right],$$

$$(D) \quad D = + \operatorname{tang} \theta.$$

De plus, (E) donne, pour le minimum de s correspondant à une valeur donnée de θ ,

$$(E) \quad n_0 = - \sqrt{\frac{1}{2,5 \cos \theta}}, \quad s_0 = \frac{2}{n_0} \operatorname{tang} \theta.$$

Voici la Table des valeurs numériques calculées qui ont servi au tracé graphique (*fig. 7*) :

θ .	D.	n_0 .	s_0 .	Valeurs de s pour							
				$n=0,1.$	$n=0,3.$	$n=0,5.$	$n=1.$	$n=1,5.$	$n=0,274.$	$n=0,674.$	
0...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
10...	0,177	-0,637	0,556	1,81	0,721	0,571	0,612	0,770	0,958	»	»
11,5.	»	-0,639	0,639	»	»	»	»	»	»	»	»
16...	0,287	»	»	»	»	»	»	»	»	»	0,890
20...	0,354	-0,652	1,116	3,74	1,470	1,155	1,219	1,526	1,892	»	»
30...	0,578	-0,679	1,70	5,90	2,301	1,781	1,828	2,260	2,789	»	»
40...	0,839	-0,723	2,31	»	3,281	2,483	2,45	2,975	3,64	»	»
50...	1,192	-0,789	3,02	»	4,55	3,344	3,11	3,675	»	»	»

Séparation des valeurs de marche et de pivotement. — L'équation de la courbe de séparation s'obtient (*cf. n° 17*) en remplaçant n par $-s$ dans l'équation (E); c'est

$$(N) \quad s^2 = \frac{\operatorname{tang} \theta}{1 - 2,5 \sin \theta}.$$

Elle a pour asymptote $\theta = \arcsin \frac{1}{2,5} = 23^\circ,6$ et touche la courbe (E) au point I obtenu en faisant $s_0 = -n_0$ dans les équations (E), savoir

$$\theta = \arcsin \frac{1}{2,5} = 11^\circ,5, \quad s_0 = 0,639.$$

On voit, en résumé, que, entre l'axe Oz et la courbe (N), la racine n_2

est une solution de *marche*, et n_1 de *pivotement*. Entre les courbes (N) et (\mathcal{E}), les deux racines donnent le pivotement dans la lunule comprise entre le point O et le point I; la marche, au delà du point I. Entre la courbe (\mathcal{E}) et l'axe Ox , il n'y a plus de régime d'équilibre.

Limite de dérapage. — Si le coefficient de frottement est $\text{tang } 23^\circ,6 = 0,437$, le dérapage arrête la partie utilisable du diagramme à l'asymptote de la courbe (N).

Vitesse limite. — Le diagramme est limité, en outre, par la limite supérieure de la vitesse qu'on peut, je pense, pour un monocycle, fixer à 20^{km} à l'heure, soit $sR = 5^{\text{m}},56$ par seconde. Si l'on adopte, en outre, $R = 0^{\text{m}},50$, on a

$$s = 11,12$$

et

$$\frac{s}{\sqrt{\frac{s}{R}}} = 2,58.$$

Telle est, en se rappelant le changement de variables (nos 12 et 32), la longueur du rayon vecteur qui limite le diagramme. C'est à peu près la longueur conservée dans la figure sur l'asymptote à la courbe (N).

Limite de stabilité. — La stabilité des états d'équilibre est d'une étude plus délicate et fait l'objet du paragraphe suivant. La courbe limite de stabilité peut être pratiquement confondue avec un cercle de rayon $s = 1$ (¹).

Résumé pratique de la discussion. — En laissant de côté les solutions de pivotement qui ne sont guère utilisables, on peut dire que la solution n_2

(¹) Toutefois le cavalier pourra utiliser des équilibres instables et se maintenir à une vitesse de marche $s < 1$, surtout si le cycle est grand (n° 18). L'élévation du cycle rendra les chutes plus dangereuses, mais moins fréquentes.

seule convient, et seulement dans la région du plan comprise entre les rayons polaires 0° et $23^\circ,6$ d'une part, et, d'autre part, entre les cercles de rayons 1 et 2,6.

§ IV. — STABILITÉ DU MONOCYCLE.

53. *Simplification des équations du monocycle.* — Dans les équations du mouvement (p, n, s) (n° 24), les termes qui contiennent le coefficient

$$L = \sum m \zeta \zeta \quad (\text{n}^\circ 21)$$

apportent quelque complication ⁽¹⁾. Il importe de se rendre compte de l'importance de ces termes. Or les variables multipliées par L, savoir $n' \cos \theta$, p' et $p^2 \sin \theta$, restent petites, étant nulles dans le cas de régime; en outre, le coefficient L reste lui-même petit, notamment devant A, par exemple. En effet, le cavalier admet le plan moyen de la roue comme plan de symétrie. Les axes principaux d'inertie, passant par le centre de gravité, sont alors la normale à ce plan et deux axes rectangulaires dans le plan de la roue; il est intuitif, d'après la forme et la position du cavalier, que ces axes principaux sont voisins de l'horizontale et de la verticale, ces directions répondant visiblement à un minimum et à un maximum d'inertie. Ajoutons que la variation de L, due aux mouvements du corps, et qu'on est bien obligé de négliger, est peut-être égale à la valeur même de L. Pour ces raisons, je supposerai $L = 0$. Quoi qu'il en soit, c'est un cas possible qu'il est toujours permis d'étudier comme cas limite. En outre, comme il s'agit d'un état de régime, je suppose nul le moment résultant \mathcal{M} du couple moteur et des résistances. Avec ces simplifications, les équations

(1) On verra, dans l'étude de la bicyclette (n° 76), une méthode générale qui permet de traiter le cas où L n'est pas nul.

tions (p) , (n) , (s) du n° 24 s'écrivent

$$\begin{aligned} (p) \quad & \Delta p' = \mu R z s n \cos \theta + (B - C) n^2 \sin \theta \cos \theta + \mu g z \sin \theta, \\ (n) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n' + \mu R z s' \sin \theta \\ & = -2(B - C) p n \sin \theta \cos \theta - (B_1 - \mu_1 R^2) p s \cos \theta, \end{aligned} \right. \\ (s) \quad & \mu R z n' \sin \theta + \mu R^2 s' = -2 \mu R z p n \cos \theta. \end{aligned}$$

34. *Condition de stabilité déduite des équations simplifiées.* — Je résous les équations par rapport à p' , n' , s' , et j'obtiens le système

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Delta p = \mu R z s n \cos \theta + (B - C) n^2 \sin \theta \cos \theta + \mu g z \sin \theta, \\ & n' = \frac{\left\{ \begin{aligned} & \mu R^2 [-2(B - C) p n \sin \theta \cos \theta \\ & - (B_1 - \mu_1 R^2) p s \cos \theta] - \mu R z \sin \theta (-2 \mu R z p n \cos \theta) \end{aligned} \right\}}{(C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \mu R^2 - \mu^2 R^2 z^2 \sin^2 \theta}, \\ & s' = \frac{\left\{ \begin{aligned} & (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) (-2 \mu R z p n \cos \theta) \\ & - \mu R z \sin \theta [-2(B - C) p n \sin \theta \cos \theta - (B_1 - \mu_1 R^2) p s \cos \theta] \end{aligned} \right\}}{(C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \mu R^2 - \mu^2 R^2 z^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right.$$

Les nouvelles formules rentrent dans la forme générale qui a permis, pour le cerceau, les transformations des nos 8 et 9⁽¹⁾. La condition de stabilité sera, comme au n° 9 (p. 12, condition S),

$$(S) \quad 0 < -\frac{p''}{p},$$

avec

$$\frac{p''}{p} = \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{n'}{p} \frac{\partial p'}{\partial n} + \frac{s'}{p} \frac{\partial p'}{\partial s}.$$

35. *Méthode pour discuter la stabilité des régimes d'équilibre.* —

(1) Ces transformations sont basées, en effet, sur le seul fait que p' , n' , s' sont des fonctions de p , n , s et θ , de la forme

$$\begin{aligned} p' &= \text{fonct.}(n, s, \theta), \\ n' &= p \times \text{fonct.}(n, s, \theta), \quad s' = p \times \text{fonct.}(n, s, \theta). \end{aligned}$$

On voit aussi que la méthode s'appliquerait au cas où s serait maintenu constant par le couple moteur du pédalier. Ce cas est traité par une autre méthode au n° 78.

D'après les équations (1), la condition (S) sera de la forme

$$(S)_1 \quad an^2 + bn + cs^2 + d > 0,$$

où a, b, c, d sont des fonctions connues de θ . L'équation d'équilibre

$$(E) \quad (B - C)n^2 \sin\theta \cos\theta + \mu R z s n \cos\theta + \mu g z \sin\theta = 0 \quad (\text{n}^\circ 29)$$

est linéaire en s ; on en tire une valeur de la forme

$$(E)_1 \quad s = cn + \frac{f}{n},$$

qui, portée dans l'inégalité (S)₁, donne des termes en $n^2, \frac{1}{n^2}$ et un terme constant. La condition (S)₁ se présente alors sous la forme d'une inégalité bicarrée en n . Elle peut être résolue par rapport à n en fonction de θ . La valeur correspondante de s est connue par la formule (E)₁. On pourra notamment dresser une table des états limites de stabilité et figurer sur le diagramme la courbe correspondante.

Le point le plus intéressant de la discussion est celui de la marche rectiligne; puis, au cas extrême du cerceau, il est naturel d'opposer celui du monocycle infiniment léger. Un cas moyen terminera l'étude de la question.

36. Discussion de la stabilité en marche rectiligne. — La marche rectiligne est caractérisée par le fait que la vitesse de conversion n est nulle.

L'équation d'équilibre (E) (n° 29) donne alors $\theta = 0$ et s quelconque. Dans ce cas particulier, le calcul de la condition de stabilité (S) (n° 34) se simplifie beaucoup; en effet, on a, pour $n = 0$ et $\theta = 0$,

$$\begin{array}{l|l} A \frac{\partial p'}{\partial \theta} = \mu g z & - 1, \\ A \frac{\partial p'}{\partial n} = \mu R z s & - \frac{p'}{p} = + \frac{(B_1 - \mu_1 R^2)}{C} s, \\ A \frac{\partial p'}{\partial s} = 0 & - \frac{s'}{p} = \dots, \end{array}$$

d'où l'on déduit, pour la condition (S),

$$0 < -\mu_0 g z + \mu_1 R z \frac{(B_1 - \mu_1 R^2)}{C} s^2.$$

Pour reporter cette condition sur le graphique du § III, je dois faire le changement de variable qui consiste à remplacer $\frac{R s^2}{g}$ par s^2 (nos 42 et 52). Je supprimerai en outre le facteur $\mu_0 z$. Enfin, je remplacerai $B_1 - \mu_1 R^2$ par $\mu_1 R^2$ (n° 2), ce qui n'est plus exact ici, puisqu'il s'agit, non plus d'un cerceau, mais d'une roue munie de rayons, d'un moyeu et de pédales. Cependant l'erreur ainsi commise n'a aucune importance, puisqu'on peut changer à volonté les constantes que j'ai choisies pour définir le graphique et que c'est ici la première fois qu'intervient isolément la constante μ_1 . La condition de stabilité s'écrit alors

$$(S) \quad s^2 > \frac{C}{\mu_1 R^2}.$$

Pour un cavalier infiniment léger, C se réduit au moment d'inertie de la roue $C_1 = \frac{\mu_1 R^2}{2}$ et l'on retrouve le résultat obtenu pour le cerceau $s^2 > \frac{1}{2}$. Pour une roue infiniment légère devant le cavalier, le dénominateur est infiniment petit devant le numérateur; la limite inférieure de s^2 croît indéfiniment. Aucune vitesse de marche finie ne peut assurer la stabilité de l'équilibre.

Prenons enfin un cas moyen. Soient

$$\mu_0 = 60^{\text{kg}} \text{ la masse du cavalier,}$$

$$\mu_1 = 5^{\text{kg}} \text{ celle de la roue,}$$

$$R = 0^{\text{m}}, 50 \text{ le rayon de la roue.}$$

On aura

$$\mu_1 R^2 = 1, 25.$$

Quant au coefficient C , il se compose de $C_1 = \frac{\mu_1 R^2}{2}$ (n° 2) et du moment d'inertie du cavalier C_0 . Pour en avoir une idée, je l'assimile à un cylindre circulaire dont la circonférence est

$$2\pi r = 1^m, \quad \text{d'où} \quad r = 0^m,16.$$

Le moment d'inertie sera

$$C_0 = \int_0^r \frac{2\pi \rho d\rho}{\pi r^2} \mu_0 \rho^2 = \frac{2\mu_0}{r^2} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 r^2}{2},$$

et, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,77, \\ \frac{\mu_1 R^2}{2} &= 0,625, \\ C &= 1,40, \quad \frac{C}{\mu_1 R^2} = \frac{1,40}{1,25}. \end{aligned}$$

On déduit enfin de là, pour la condition de stabilité,

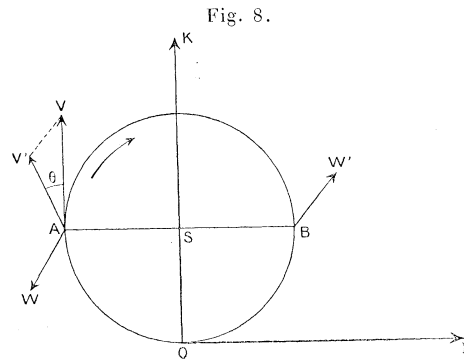
$$s > 1,06.$$

37. Réflexions sur la stabilité des appareils rotatifs. — La conclusion du numéro précédent est que *la stabilité diminue indéfiniment avec l'importance relative du moment d'inertie de la roue*. Ce résultat est évident *a priori*; en effet, ce sont les forces centrifuges composées qui seules peuvent donner la stabilité; or, dans la marche rectiligne, celles du cavalier sont très faibles, puisqu'il ne possède aucune vitesse de rotation sensible. La stabilité vient donc de la rotation de la roue. On peut en reconnaître la cause ainsi (*fig.* 8):

La roue C , roulant sur OI , possède une vitesse de translation qui n'intervient pas, et une vitesse de rotation s autour de son centre S . Celle-ci imprime à l'extrémité postérieure A du diamètre horizontal une vitesse $V = sR$. Supposons maintenant qu'un défaut d'équilibre imprime au cer-

ceau la rotation $\theta = p dt$. La vitesse vecteur AV , tournant de l'angle θ , passe de la position AV à la position AV' et il en résulte pour le point A une accélération $W = \frac{VV'}{dt} = \frac{sR \times p dt}{dt} = Rsp$ dont la direction est normale au cerceau et dirigée en avant du papier.

L'extrémité antérieure B du même diamètre prend une accélération égale et de sens contraire BW' . Il en résulte ce qu'on pourrait appeler un *couple accélérateur* dont l'axe est la verticale OK et dont le moment est



$psR \times 2R = 2psR^2$. De là un couple d'inertie de sens contraire et égal au précédent multiplié par la masse de l'élément considéré en A. Ce couple d'inertie tend à donner au cerceau une vitesse de conversion n de gauche à droite autour de OK . De là ce principe expérimental, déjà rencontré par les formules (n° 12) :

Le cerceau converse du côté où il penche.

En traitant la nouvelle rotation n comme on a traité la première p , on voit que le nouveau couple d'inertie qui en résulte tend à relever le cerceau. D'ailleurs, la première accélération de chute p' est proportionnelle seulement à l'action de la pesanteur ; la seconde accélération W est proportionnelle à s ; la troisième, celle de relèvement, sera proportionnelle à s^2 . Quand s est suffisamment grand, on comprend que le couple de relèvement doit finir par l'emporter sur celui de chute, qui est dû à la seule pesanteur. Mais dès que le cerceau se relève, les effets sont changés de sens. On prévoit ainsi

que les rotations seront alternativement dans un sens et dans l'autre et l'on conçoit qu'elles soient périodiques. L'explication que je viens de donner s'applique à tous les appareils où un solide de révolution est animé d'une rotation assez rapide; elle fait comprendre la stabilité de ces appareils. La première partie de l'explication met en évidence le principe de la boussole gyroskopique qu'on peut vérifier avec une de ces toupies gyroskopiques qui servent de jouet aux enfants, savoir :

L'axe de révolution tend toujours à venir s'appliquer sur l'axe de la rotation additionnelle qu'on imprime au système.

C'est aussi le secret de ces forces centrifuges composées si paradoxales par leur direction normale à l'effort qu'on s'attend à fournir pour imprimer une rotation additionnelle voulue.

58. *Rapprochement avec la loi de Laplace; digression sur l'électricité.* — Il est difficile de ne pas reconnaître une parenté étroite entre ces forces paradoxales et la force non moins paradoxale de Laplace, relative aux actions mutuelles des aimants et des courants. De même que la force centrifuge composée est donnée en direction et grandeur par l'aire orientée du parallélogramme construit sur les deux vecteurs *rotation* et *vitesse relative*, de même l'action de Laplace est donnée par l'aire des deux vecteurs *courant* et *champ magnétique*, au point où est l'élément de courant. Mais lequel des deux vecteurs, *champ magnétique* ou *courant*, faut-il identifier avec la rotation? lequel avec la vitesse relative? La réponse paraît indiquée par ce fait que le point d'application de la force de Laplace est l'élément de courant et non pas l'élément magnétique qui produit le champ. Le courant seul peut jouer le rôle de la vitesse. D'ailleurs, les faits de transport tels que galvanoplastie, arrachement par l'étincelle et l'arc voltaïque, expériences de Crookes, semblent montrer qu'il y a effectivement une vitesse dans la direction du courant, tandis que rien de semblable n'est constaté dans le champ magnétique. Il ne semble pas très hasardeux de conclure que le courant est une vitesse et le champ magné-

tique un tourbillon. Tous les faits confirment cette hypothèse : les découvertes d'Ampère relatives aux champs magnétiques produits par les courants fermés, d'abord ; puis le sens du tourbillon se trouve alors défini par celui du courant fermé dont le plan passe par le point considéré et qui est capable de fournir le champ magnétique donné en ce point. Ces assimilations faites, le sens de la force centrifuge composée qui agirait sur l'élément de courant est déterminé. Or on constate que c'est précisément le sens défini par la règle d'Ampère.

Voici un fait encore plus frappant. Les lois des courants induits se calculent, on le sait, par le principe de la conservation de l'énergie. S'agit-il des courants induits par un aimant sur un circuit, la théorie de Helmholtz ne présente aucune difficulté. Mais s'il s'agit de l'induction d'un courant sur lui-même ou sur un autre courant, les physiciens connaissent deux méthodes non seulement *différentes*, mais *opposées*. La première consiste à regarder comme *énergie potentielle* l'intégrale changée de signe du travail élémentaire des forces d'Ampère agissant entre les éléments des courants ; c'est la plus répandue dans l'enseignement. La deuxième est moins connue ; elle est due à Maxwell et consiste à regarder au contraire la même énergie comme une *énergie cinétique* et à la traiter par la méthode de Lagrange pour en déduire les forces d'inertie.

La première méthode consiste donc à regarder les forces qui agissent entre les courants comme des forces statiques ou forces effectivement appliquées ; la deuxième méthode, au contraire, traite ces forces comme des forces d'inertie. Or, la première méthode conduit à un *résultat faux* que les Traités dissimulent par une faute de signe. Il faut y regarder de près pour voir la faute, mais elle est certaine et je l'ai vérifiée de plusieurs façons. Au contraire, la méthode de Maxwell conduit au signe convenable. Il est bien clair, d'ailleurs, que les deux méthodes doivent conduire à des résultats de signes contraires, puisque, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle demeurant constantes, les variations de ces deux énergies sont de signes contraires.

Ajoutons que, pour le cas particulier de la self-induction, la méthode de

Maxwell traite comme énergie cinétique l'énergie de self-induction $\frac{1}{2} Li^2$; or la formule même de l'établissement du courant et les expériences ne permettent pas le doute à cet égard : l'énergie $\frac{1}{2} Li^2$ a tous les caractères de l'énergie cinétique. Elle joue toujours le rôle de volant, jamais celui de ressort bandé. Je citerai notamment le rôle du condensateur ajouté par Fizeau à la bobine de Ruhmkorff pour rendre plus nette la rupture du circuit primaire. Il reçoit à l'état potentiel l'énergie cinétique du courant. C'est un ressort qu'on accroche au volant pour l'arrêter.

Il me faut limiter là cette digression, quelque intéressant qu'en soit l'objet, pour revenir à la stabilité du monocycle.

59. Discussion de la stabilité d'un monocycle infiniment léger. — L'hypothèse nouvelle simplifie un peu les deux dernières équations (I) (n° 54), par la disparition des termes en $ps \cos \theta$, parce que le coefficient $B_1 - \mu_1 R^2$ est alors nul. En posant

$$B - C - \mu h^2 = E \quad (1),$$

j'obtiens

$$\begin{aligned} A \frac{dp'}{d\theta} &= -\mu R h s n \sin \theta + (\mu h^2 + E) n^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \mu g h \cos \theta, \\ A \frac{dp'}{dn} &= +\mu R h s \cos \theta + 2(\mu h^2 + E) n \sin \theta \cos \theta, \\ A \frac{dp'}{ds} &= +\mu R h n \cos \theta, \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \frac{n'}{p} &= \frac{-2En \sin \theta \cos \theta}{C + E \sin^2 \theta}, \\ \frac{s'}{p} &= \frac{-2 \frac{h}{R} C n \cos \theta}{C + E \sin^2 \theta}. \end{aligned} \right.$$

On déduit de là, pour la condition de stabilité,

$$(S) \left\{ \begin{aligned} &\frac{C + E(1 + \cos^2 \theta)}{C + E \sin^2 \theta} \mu R h s n \sin \theta \\ &+ \frac{C \mu h^2 + E[(\mu h^2 + E) \sin^2 \theta (1 + 2 \cos^2 \theta) - C(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]}{C + E \sin^2 \theta} n^2 - \mu g h \cos \theta > 0. \end{aligned} \right.$$

(1) La cote du cavalier désignée jusqu'ici par z (n° 21) est désormais désignée par h .

Cette condition se simplifie beaucoup si l'on tient compte de la relation numérique qui a été supposée au n° 32

$$B - C = \mu h^2$$

pour la construction du graphique. Il en résulte en effet que E est nul et la condition de stabilité devient

$$(S) \quad \mu R h s n \sin \theta + \mu h^2 n^2 - \mu g h \cos \theta > 0;$$

elle peut s'écrire, en faisant le changement de variable (n°s 12 et 32) qui consiste à remplacer $s \sqrt{\frac{R}{g}}$ et $n \sqrt{\frac{R}{g}}$ par s et n ,

$$(S_1) \quad s n \sin \theta + \frac{h}{R} n^2 - \cos \theta > 0.$$

Telle est la formule simplifiée à laquelle j'ai appliqué la méthode du n° 33. On trouve

$$n^2 > \frac{1}{\frac{h}{R} \cos^3 \theta}.$$

En faisant $\frac{h}{R} = 2,5$, j'ai obtenu la Table numérique que voici pour la valeur limite de n et la valeur correspondante de s tirée de l'équation d'équilibre (E) (n° 29):

θ .	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
$n \dots \dots$	0,03	0,65	0,69	0,78	0,94	1,50
$s \dots \dots$	0,00	0,55	1,12	1,72	2,41	3,68

Si l'on compare ces nombres à ceux du n° 32, on voit que la courbe limite de stabilité qu'on peut construire avec ces nombres suit de très près la courbe (E). Donc, pratiquement, on peut dire que la condition de stabilité consiste à prendre dans l'équation d'équilibre (E) (n° 29), la racine n_1 , qui est la plus petite dans l'ordre algébrique, c'est-à-dire la plus grande en valeur absolue. Ainsi, c'est seulement en tournant que le cavalier

d'un cycle léger peut acquérir la stabilité. Or le monocycliste qui s'est montré au Nouveau Cirque en 1895-1896 possédait une roue de faible inertie, et il évoluait justement sur une plate-forme de petite surface (1). La cause doit en être cherchée, je pense, dans le résultat que je viens de signaler.

J'ai supposé $B - C = \mu h^2$, c'est-à-dire $E = 0$, à cause de la grande simplification que cette hypothèse apporte dans l'inégalité (S); mais il ne faut pas dissimuler que, si elle est très acceptable au n° 32, où il ne s'agit que d'avoir une valeur numérique approchée du coefficient $B - C$ de l'équation (E), elle ne l'est plus au même titre dans l'inégalité (S). En effet, les termes en μh^2 se sont ici détruits, et dans le coefficient du terme en $sn \cdot \sin \theta$, par exemple, on doit considérer la fraction $\frac{C + E(1 + \cos^2 \theta)}{C + E \sin^2 \theta}$. Dans cette fraction, E figure, non plus à côté du terme μh^2 , mais à côté de C , qui est beaucoup plus petit. Loin d'être négligeable, E est ordinairement plus grand que C . Il conviendrait donc de remplacer E , non par zéro, mais par une évaluation plus vraisemblable, la valeur zéro répondant à un cavalier démesurément gros et court. Mais la complication des calculs est alors si rebutante et augmente si peu l'intérêt du sujet que j'ai cru devoir me limiter au cas $E = 0$, qui, somme toute, peut toujours être envisagé en théorie.

40. *Condition de stabilité dans un cas intermédiaire entre le cerceau et le monocycle infiniment léger.* — Pour ce cas, les raisons que je viens de donner prennent plus de force encore : il faudrait, pour faire un calcul numérique exact, plus de temps et de patience que n'en mérite le sujet. Si la façon dont j'ai fait le calcul ne répond pas à la réalité, elle suffit du moins pour donner le renseignement grossier que j'ai utilisé à la fin du n° 32, sous le titre *Limite de stabilité*. Il faut remarquer, d'ailleurs, que la stabilité en marche rectiligne a été étudiée au n° 36 sans invoquer les simplifications ici introduites : c'est le cas le plus important, et le résultat

(1) Un carré d'environ 4^m de côté.

trouvé est indépendant des hypothèses de simplification. Au fond, quoiqu'elles simplifient extraordinairement les calculs, ces hypothèses ne modifient guère les résultats au point de vue pratique. Ainsi je supposerai

$$B = C + \mu h^2, \quad \frac{h}{R} = 2,5, \quad \frac{\mu_1 R^2}{C} = 1 \text{ (cf. n}^\circ \text{ 56)}, \quad B_1 = 2 \mu_1 R^2 \text{ (n}^\circ \text{ 4)}.$$

Enfin, je négligerai les termes provenant de la roue devant ceux qui proviennent du cavalier, de façon que, dans les équations, les lettres sans indices A, B, C, . . . seront remplacées par leurs valeurs relatives au cavalier et non pas par les sommes des termes empruntés aux formules (2) et (3) (n^{os} 23 et 24) qu'elles représentent correctement d'après les conventions faites au n^o 24.

Avec ces simplifications, reportons-nous aux équations (1) du n^o 54. Pour avoir la condition de stabilité, nous aurons à refaire sur ces équations le calcul du n^o 59, avec la simplification $E = B - C - \mu h^2 = 0$, mais aussi avec la complication qui vient de la présence, dans n' et s' , du terme $(B_1 - \mu_1 R^2)ps \cos \theta$ actuellement maintenu. Les formules deviennent

$$\begin{aligned} A \frac{dp'}{d\theta} &= -\mu R h s n \sin \theta + \mu h^2 n^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \mu g h \cos \theta, \\ A_1 \frac{dp'}{dn} &= \mu R h s \cos \theta + 2 \mu h^2 n \sin \theta \cos \theta, \\ A \frac{dp'}{ds} &= \mu R h n \cos \theta, \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \frac{n'}{p} &= -s \cos \theta, \\ \frac{s'}{p} &= -\frac{2h}{R} n \cos \theta + \frac{h}{R} s \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \right.$$

On déduit de là pour la condition de stabilité

$$\mu h^2 n^2 + (\mu R h \sin \theta + \mu h^2 \sin \theta \cos^2 \theta) s n + \mu R h s^2 \cos^2 \theta - \mu g h \cos \theta > 0.$$

Je divise les deux membres par $\mu R h$ et je remplace $\frac{g}{R}$ par l'unité, ce qui revient à faire le changement de variables expliqué aux n^{os} 12 et 52. La condition de stabilité s'écrit en définitive

$$(S) \quad \frac{h}{R} n^2 + \left(1 + \frac{h}{R} \cos^2 \theta \right) s n \sin \theta + s^2 \cos^2 \theta - \cos \theta > 0.$$

41. *Construction de la courbe de stabilité dans le cas intermédiaire.* — Les états d'équilibre stable sont définis par le système des deux conditions d'équilibre et de stabilité

$$(E) \quad \frac{h}{R} n^2 \sin \theta + sn + \operatorname{tang} \theta = 0 \quad (\text{n}^\circ \text{ 52}),$$

$$(S) \quad \frac{h}{R} n^2 + \left(1 + \frac{h}{R} \cos^2 \theta\right) sn \sin \theta + s^2 \cos^2 \theta - \cos \theta > 0 \quad (\text{n}^\circ \text{ 40}).$$

Conformément à la méthode du n° 53, je porte dans (S) la valeur de s tirée de l'équation (E). Il vient, tous calculs faits,

$$(S) \quad S(n^2) = \frac{h}{R} \cos^2 \theta n^4 - \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta\right) n^2 + \sin^2 \theta = 0.$$

Examinons d'abord entre quelles limites doit varier θ pour que ce trinôme en n^2 ait ses racines réelles. La condition de réalité est

$$\left[\frac{1}{\cos \theta} - \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta\right]^2 > 4 \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

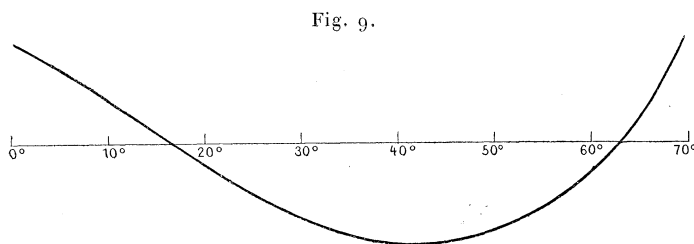
Le crochet du premier membre est toujours positif dans l'hypothèse adoptée $\frac{h}{R} = 2,5$. On peut alors extraire la racine carrée des deux membres de l'inégalité, ce qui donne

$$\frac{1}{\cos \theta} - \frac{h}{R} \sin^2 \theta \cos \theta - \sqrt{\frac{h}{R}} \sin 2\theta > 0.$$

En calculant le premier membre en fonction de θ , j'ai obtenu la Table suivante :

θ .	0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.	60°.	70°.
1 ^{er} membre.	+1,000	+0,403	-0,225	-0,757	-1,054	-0,874	-0,308	+1,149
C.								10

J'ai porté en abscisses les valeurs de θ et en ordonnées celles du premier membre; j'ai obtenu la courbe (*fig. 9*):



Elle coupe l'axe des abscisses aux deux points

$$\theta = 16^{\circ}, 0 \quad \text{et} \quad \theta = 62^{\circ}, 7.$$

Entre ces deux valeurs de θ , le trinôme $S(n^2)$ a ses racines imaginaires; il est toujours positif et la condition de stabilité (S) est satisfaite. A $\theta > 62^{\circ}, 7$ répond une branche de la courbe limite de stabilité; mais cette branche n'a pas d'intérêt, parce que ces grandes inclinaisons ne sont jamais atteintes. Considérons enfin le troisième cas $\theta < 16^{\circ}, 0$. Le trinôme $S(n^2)$ admet alors deux racines positives a^2 et b^2 . Il faudra, pour satisfaire à la condition de stabilité, prendre n^2 extérieur à l'intervalle (a^2, b^2) , c'est-à-dire n extérieur à l'intervalle $(-a, -b)$ (¹). A chacune des valeurs limites $-a$ et $-b$, prise pour n , l'équation (E) fait correspondre une valeur de s . Ainsi, à chaque valeur de θ comprise entre 0° et $16^{\circ}, 0$ correspondent deux points qui représentent des états limites d'équilibres stables $(s_a, n = -a)$ et $(s_b, n = -b)$. Pour satisfaire à la condition de stabilité, il faudra prendre des points extérieurs à la courbe dessinée par les points limites (courbe S dont la *fig. 7*, p. 52, porte seulement la branche correspondante à $\theta < 16^{\circ}, 0$).

Pour $\theta = 0$, il convient de se reporter aux conditions (E) et (S).

(¹) Car n est forcément négatif d'après l'équation (E) (*cf.* n° 12).

Elles donnent

$$s = 0, \quad n^2 > \frac{R}{h} \quad \text{et} \quad n = 0, \quad s > 1.$$

Des points limites $(s = 0, n = \sqrt{\frac{R}{h}})$ et $(n = 0, s = 1)$ partent deux branches de courbe qui viennent se raccorder sur le rayon vecteur $\theta = 16^\circ, 0$ au point

$$n^2 = \sqrt{\frac{R}{h}} \operatorname{tang} \theta, \quad s = -\frac{1}{n} \operatorname{tang} \theta - \frac{h}{R} n \sin \theta;$$

soit, avec les nombres adoptés,

$$\theta = 16^\circ, 0, \quad n = -0,425, \quad s = 0,97.$$

A l'origine, la courbe est tangente au rayon vecteur $\theta = 0$; pour avoir la tangente au point $(\theta = 0, s = 1)$, il suffit de faire θ infiniment petit. On voit que la différence entre s et 1 est du second ordre; il en résulte que la courbe part normalement au rayon vecteur $\theta = 0$.

Pour achever de déterminer la courbe (S), on peut chercher son contact avec la courbe (E). Celle-ci est définie par les formules (E) du n° 52 :

$$(E) \quad n = -\sqrt{\frac{R}{h \cos \theta}}, \quad s = -\frac{2}{n} \operatorname{tang} \theta.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (S), on a une équation qui donne les valeurs de θ répondant à la question. On trouve la solution unique

$$\theta = 63^\circ, 5.$$

Elle correspond à la branche de courbe qui a été laissée de côté. Ainsi, la branche qui nous intéresse ne touche pas la courbe (E). L'ensemble de ces renseignements suffit pour tracer la courbe (S) comme on l'a fait sur l'épure.

La conclusion pratique est que, pour assurer la stabilité, il faut prendre une vitesse de marche supérieure à $\frac{\mu_1 R}{C}$ ($= 1$ dans notre application numérique, et avec le changement d'unités adopté).

CONCLUSION. — PRINCIPE D'UN MONOCYCLE STABLE.

42. Le plus grave inconvénient du monocycle est l'instabilité autour de l'axe de la roue; pour le corriger, il suffit de placer au-dessous de cet axe le centre de gravité du cavalier. Il faut pour cela augmenter beaucoup son rayon. En même temps il augmente de poids, mais aussi il gagne de la stabilité dans le sens de l'angle de chute θ . Si l'on n'est pas préoccupé par le poids ou les dimensions encombrantes du cycle, on ne doit pas hésiter à prendre une grande roue. Ce système présente quelques difficultés pour un cavalier unique, car il faudrait le placer dans le plan de la jante et la roue devrait alors présenter un grand évidement capable de recevoir le cavalier. La chose n'est pas impossible, mais elle est encore assez malaisée. Le système paraît plus avantageux s'il s'agit de deux cavaliers : on pourra les disposer de part et d'autre de la roue. Imaginez que chacun des deux cavaliers soit installé sur un cadre de bicyclette muni de son pédalier. Réunissez les deux cadres par l'axe de la roue et rappelez le mouvement de chaque pédalier sur le moyeu de la roue. Pourvu que la roue ait un rayon supérieur à la cote du centre de gravité d'un cavalier sur une bicyclette (soit environ $1^m, 10$), vous aurez réalisé un monocycle stable. Quant aux autres monocycles, ils ne sont guère utilisables que par des équilibristes de profession.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE DE LA BICYCLETTE.

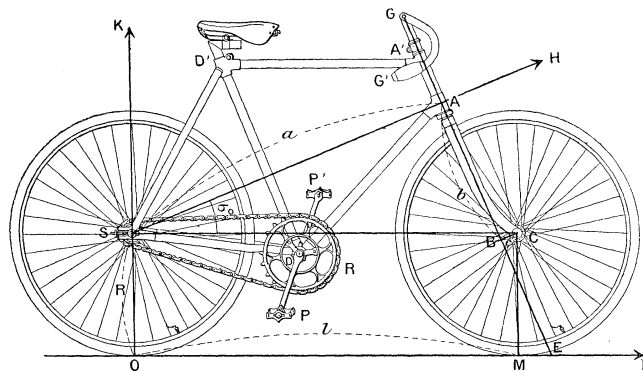
CHAPITRE PREMIER.

GÉOMÉTRIE DE LA BICYCLETTE.

§ I. — INTRODUCTION. ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

45. Description sommaire de la bicyclette (fig. 9 bis). — La bicyclette

Fig. 9 bis.



se compose d'organes reliés par un châssis nommé *cadre* et dont la forme est généralement celle-ci :

Un trapèze AA'D'D, la petite base AA' en avant ; la grande base DD' sert d'appui à un triangle DD'S qui prolonge le cadre vers l'arrière ; les

côtés DS et D'S sont formés chacun de deux tiges entre lesquelles tourne la roue d'arrière.

Les organes liés au cadre sont ceux-ci :

AA' est un tube qui conduit l'axe de rotation AG du *guidon* GG'; au sortir du tube AA', l'axe du guidon est prolongé, au-dessous du point A, par une *fourche* AC qui, vers le bas, est courbée en avant. A son extrémité C, la fourche porte la roue d'avant ou *roue mobile*, qui tourne librement entre les deux branches de la fourche AC. Comme le montre la figure, le prolongement de l'axe du guidon AG traverse le rayon vertical CM. On verra plus loin l'importance de cette condition. La grande base DD' porte en haut la selle D'; à son extrémité inférieure D, le cadre est traversé normalement par l'axe du *pédalier*. Le pédalier se compose d'un système de deux manivelles solidaires DP et DP' sur lesquelles le cavalier agit par les *pédales* P et P'. Au système des manivelles est invariablement liée une roue dentée concentrique R qui sert à transmettre le mouvement à la roue d'arrière.

L'extrémité postérieure S du cadre porte l'axe de la roue d'arrière ou *roue fixe*. Cet axe est muni d'un *pignon* qui le met en relation avec la roue dentée du pédalier par l'intermédiaire de la *chaîne*.

Tandis qu'en agissant sur le guidon GG', on peut faire tourner l'axe de la roue d'avant autour de AA', celui de la roue d'arrière est invariablement fixé, normal au cadre. De plus, la roue d'avant peut tourner librement autour de son axe C; la roue d'arrière, au contraire, est liée au pédalier par la chaîne. Ces différences justifient les noms de *roue fixe* et *roue mobile* donnés aux roues d'arrière et d'avant. On les appelle aussi *roue motrice* et *roue directrice*.

44. *Choix des axes, des données et des inconnues.* — Je conserverai, pour la roue d'arrière S, les notations et conventions du cerceau (n° 4), notamment la définition des deux trièdres fondamentaux OIJK et OIjk. J'adopterai en outre les notations suivantes :

- G Vecteur unité dirigé vers le haut et ayant pour direction l'axe du guidon,
 H Normale au guidon, vers l'avant, dans le plan du cadre,
 H₁ Nouvelle position, dans le plan de la roue mobile, et après rotation du guidon, de la droite qui coïncidait avec H.

Tels sont les nouveaux repères de direction.

Constantes spécifiques. — Outre le rayon R des roues que je suppose égales, j'aurai à envisager les constantes que voici, prises dans la position normale de la bicyclette :

- SC $= l$ Distance des centres des roues ou de leurs contacts sur le sol,
 SA $= a$ Distance de S à l'axe AG du guidon,
 AB $= b$ Projection de SC sur l'axe AG du guidon,
 BC $= c$ Distance du centre C de la roue d'avant à l'axe AG du guidon,
 $\widehat{ASC} = \sigma_0$ Inclinaison de SA sur OI ou du guidon sur la verticale.

Ces constantes ne sont pas toutes indépendantes, mais sont liées par les relations

$$(a) \quad a + c = l \cos \sigma_0 \quad (\text{d'où} \quad a = -c + l \cos \sigma_0),$$

$$(b) \quad b = l \sin \sigma_0.$$

Les constantes spécifiques de la machine ⁽¹⁾ seront en définitive

$$R, l, c, \sigma_0.$$

Paramètres de position. — Nous aurons à envisager d'abord deux variables indépendantes, savoir

(1) Au point de vue géométrique, bien entendu.

θ Inclinaison du cadre sur la verticale (comptée comme pour le cerceau, n° 1),

γ Angle de position du guidon, autour de l'axe AG ⁽¹⁾.

Nous aurons en outre à considérer deux nouveaux angles, fonctions des deux précédents et qui demandent quelque attention, ce sont

σ Inclinaison de SA sur OI ou de AG sur la ligne de pente du cadre.

μ Paramètre de position du point de contact M de la roue d'avant avec le sol. C'est l'angle de CM avec le prolongement de GA.

Quand on tourne le guidon de γ , le point M se déplace sur la roue mobile ; μ varie, et il en résulte une petite variation de σ . Si, par exemple, le cadre restant vertical, on tourne le guidon d'un angle droit, GA devient la ligne de plus grande pente de la roue mobile. Le rayon de contact CM est alors parallèle à GA, μ est nul. Mais alors, le rayon de contact étant incliné au lieu d'être demeuré vertical, le point C s'est abaissé et il en est résulté une petite diminution de l'angle σ . Pour la mettre en évidence, je poserai

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1.$$

Quand θ et γ sont donnés, σ et μ en résultent ; avant d'aborder la partie mécanique, nous devons étudier les fonctions σ et μ .

43. *Méthode pour déterminer les fonctions σ et μ .* — On repère le point M par rapport aux axes choisis, au moyen de l'égalité vectorielle

$$OM = OS + SA + AB + BC + CM.$$

Tous les vecteurs du second membre s'expriment en fonction des constantes spécifiques de la bicyclette, des variables indépendantes θ et γ , et des fonctions inconnues σ et μ . Pour exprimer que M est le point de contact de la roue d'avant avec le sol, j'écris : 1° que la cote du point M est nulle ; 2° que le point M est le point le plus bas de la circonférence

(1) Compté positivement de droite à gauche, comme toutes nos rotations.

de la roue mobile. Ces deux conditions s'écrivent, dans la notation de Grassmann (1),

$$(1) \quad K | OM = 0,$$

$$(2) \quad K \left| \frac{dOM}{d\mu} \right. = 0.$$

Ce sont les deux équations du problème. Elles détermineront σ et μ quand on aura explicité les expressions de tous les vecteurs en fonction des constantes spécifiques et des paramètres de position $\theta, \gamma, \sigma, \mu$.

46. *Calcul des vecteurs du n° 43.* — Les formules sont intuitives sur la *fig. 9 bis*.

$$\begin{array}{l} OS = Rk \\ SA = aH \\ AB = -bG \\ BC = cH_1 \\ CM = -R(H_1 \sin \mu + G \cos \mu) \end{array} \left| \begin{array}{l} OM = Rk + aH - (b + R \cos \mu)G \\ \qquad \qquad \qquad + (c - R \sin \mu)H_1. \end{array} \right.$$

47. *Calcul des directions remarquables en fonction des paramètres et du trièdre IJK.* — Les formules sont encore intuitives sur la figure, savoir

$$\begin{array}{l} + R \\ + a \\ (-R \cos \mu - b) \\ (-R \sin \mu + c) \end{array} \left| \begin{array}{l} j = J \cos \theta + K \sin \theta, \\ k = -J \sin \theta + K \cos \theta, \\ H = I \cos \sigma + k \sin \sigma = I \cos \sigma - J \sin \theta \sin \sigma \\ \qquad \qquad \qquad + K \cos \theta \sin \sigma, \\ G = -I \sin \sigma + k \cos \sigma = -I \sin \sigma - J \sin \theta \cos \sigma \\ \qquad \qquad \qquad + K \cos \theta \cos \sigma, \\ H_1 = H \cos \gamma + j \sin \gamma = I \cos \sigma \cos \gamma \\ \qquad \qquad \qquad + J(\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \sin \sigma) \\ \qquad \qquad \qquad + K(\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \sigma). \end{array} \right.$$

(1) Dans cette notation, $A | B$ désigne le produit des deux vecteurs A et B par le cosinus de leur angle.

48. *Équations définitives du problème.* — Pour déduire des formules des n^{os} 45, 46, 47 l'expression de OM, je multiplie les quatre dernières formules respectivement par $+R$, $+a$, $-b - R \sin \mu$, $c - R \sin \mu$, et j'ajoute. Pour avoir $K | OM$, je dois retenir seulement dans la somme le coefficient de K . J'obtiens ainsi la première équation du problème n^o 45

$$(1) \left\{ \begin{aligned} o = K | OM = R \cos \theta + a \cos \theta \sin \sigma - b \cos \theta \cos \sigma \\ + c(\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \sigma) \\ - R \sin \mu (\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \sigma) - R \cos \mu \cos \theta \cos \sigma. \end{aligned} \right.$$

La deuxième équation s'obtient en dérivant celle-ci par rapport à μ :

$$o = -R \cos \mu (\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \sigma) + R \sin \mu \cos \theta \cos \sigma,$$

d'où l'on tire, pour déterminer μ , la formule

$$(2) \quad \text{tang } \mu = \text{tang } \sigma \cos \gamma + \frac{\text{tang } \theta \sin \gamma}{\cos \sigma}.$$

49. *Transformation de l'équation (1) du problème.* — Pour étudier l'influence de l'inclinaison du cadre, il y a intérêt à ordonner l'équation (1) par rapport à θ ; il vient ainsi

$$o = (a + c \cos \gamma) \sin \sigma - b \cos \sigma + R [1 - \cos \gamma \sin \sigma \sin \mu - \cos \sigma \cos \mu] + \text{tang } \theta \sin \gamma (c - R \sin \mu).$$

Si, de plus, on remplace a et b par leurs valeurs (a) et (b) (n^o 44), les deux premiers termes deviennent

$$l (\cos \sigma_0 \sin \sigma - \cos \sigma \sin \sigma_0) + c (\cos \gamma - 1) \sin \sigma.$$

Le multiplicateur de l est le sinus de l'angle $\sigma - \sigma_0$ ou σ_i ; de plus, $1 - \cos \gamma$ peut être remplacé par $2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$. En définitive, l'équation (1) peut être

écrite sous la forme

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} 0 = l \sin \sigma_1 - 2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \sigma \\ \quad + R(1 - \cos \sigma \cos \mu - \sin \sigma \sin \mu \cos \gamma) + \operatorname{tang} \theta \sin \gamma (c - R \sin \mu). \end{array} \right.$$

Les équations (1) et (2) déterminent σ et μ en fonction de θ et γ .

Nous examinerons d'abord le cas simple où le cadre demeure vertical ($\theta = 0$).

§ II. — CAS OU LE CADRE EST VERTICAL ($\theta = 0$).

30. *Simplification et interprétation géométrique des formules.* — Si l'on fait $\theta = 0$, les formules trouvées aux nos 48 et 49 pour déterminer σ et μ se simplifient et deviennent

$$(1) \quad 0 = l \sin \sigma_1 - 2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \sigma + R(1 - \cos \sigma \cos \mu - \sin \sigma \sin \mu \cos \gamma),$$

$$(2) \quad \operatorname{tang} \mu = \operatorname{tang} \sigma \cos \gamma.$$

La deuxième exprime que M est le point le plus bas de la roue C (*fig.* 10). Il suffit donc, pour la retrouver, de considérer que CM est la ligne de plus grande pente de la roue, c'est-à-dire la projection de la verticale CK' sur son plan. Il en résulte que le triangle sphérique G'K'M, dont les sommets sont les traces sur la sphère des trois directions, — G — K et CM, est rectangle en M. Or, si l'on connaît, dans ce triangle,

$$\widehat{G'} = \gamma, \quad G'K' = \sigma,$$

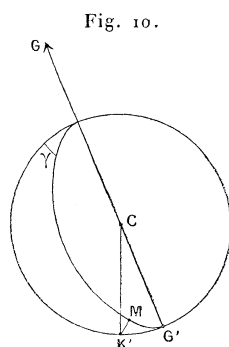
on peut calculer $G'M = \mu$ par la formule

$$\cos G' = \operatorname{cotang} G'K' \operatorname{cotang} \left(\frac{\pi}{2} - G'M \right),$$

d'où l'on tire, en remplaçant les éléments par leurs valeurs,

$$\operatorname{tang} \mu = \operatorname{tang} \sigma \cos \gamma.$$

La même *fig.* 10 conduit à une interprétation géométrique du coeffi-



cient de R dans l'équation (1). On a, en effet, dans le triangle $G'K'M$,

$$\begin{aligned}\cos K'M &= \cos G'K' \cos G'M + \sin G'K' \sin G'M \cos G' \\ &= \cos \sigma \cos \mu + \sin \sigma \sin \mu \cos \gamma.\end{aligned}$$

On reconnaît ainsi que le coefficient de R est $1 - \cos K'M$.

La formule (1) s'écrit alors

$$0 = R + l \sin \sigma - c(1 - \cos \gamma) \sin \sigma - R \cos K'M,$$

et, sous cette forme, le second membre montre intuitivement la projection du chemin OSCM sur la verticale. Les formules (1) et (2) se trouvent ainsi vérifiées par une méthode plus géométrique que celle du § I.

Il y a quelque avantage à introduire dans le calcul l'angle auxiliaire que nous venons de rencontrer $\widehat{K'M} = \pi - \widehat{CM, OK} = \tau$. Les trois inconnues σ , μ et τ sont alors définies par les trois équations

$$(1) \quad \text{tang } \mu = \text{tang } \sigma \cos \gamma,$$

$$(2) \quad 0 = R(1 - \cos \tau) + l \sin \sigma - 2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \sigma,$$

$$(3) \quad \sin \tau = \sin \sigma \sin \gamma.$$

51. *Méthode approchée pour la résolution numérique des équations en σ , μ , τ .* — Comme j'ai posé $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, je pose $\tau = \tau_0 + \tau_1$, τ_0 étant la valeur que prend τ quand σ est remplacé par σ_0 dans l'équation (3) (n° 50). Puis je néglige le second ordre des accroissements σ_1 et τ_1 . Alors τ sera donné, non plus par l'équation (3), mais par le système des deux formules qu'on en déduit, savoir :

$$(3)' \quad \sin \tau_0 = \sin \sigma_0 \sin \gamma, \quad \tau_1 \cos \tau_0 = \sigma_1 \cos \sigma_0 \sin \gamma.$$

Je remplace de même σ et τ par $\sigma_0 + \sigma_1$ et $\tau_0 + \tau_1$ dans l'équation (2), et je développe par rapport à τ_1 et σ_1 ; enfin je remplace τ_1 par sa valeur (3)'. Il vient, à la même approximation du premier ordre,

$$(2)' \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2R \sin^2 \frac{\tau_0}{2} - 2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \sigma_0 \\ \quad + \sigma_1 (R \operatorname{tang} \tau_0 \sin \sigma_0 \sin \gamma + l - 2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos \sigma_0). \end{array} \right.$$

La marche du calcul sera alors celle-ci :

γ étant donné arbitrairement, on calcule τ_0 par la formule (3)'; on porte la valeur trouvée dans (2)' et l'on en tire σ_1 . Dès lors, on connaît σ et la formule (1) fait connaître μ . Ajoutons qu'il est avantageux de calculer μ par le même artifice, en posant

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \quad (\text{avec } \operatorname{tang} \mu_0 = \operatorname{tang} \sigma_0 \cos \gamma).$$

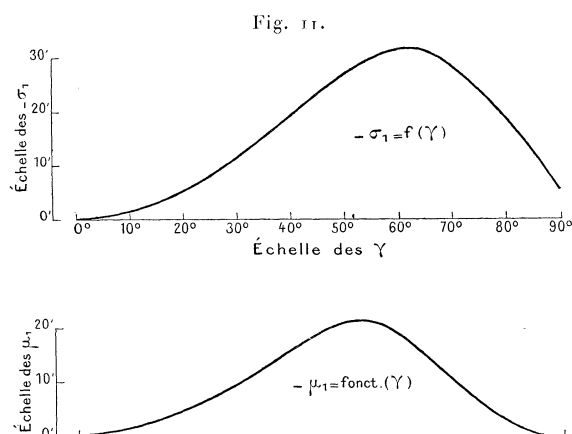
52. *Application numérique.* — Dans une bicyclette d'un modèle ancien, on a pour les constantes spécifiques les valeurs que voici :

R.	l.	c.	σ_0 .
0 ^m , 38	1 ^m , 10	0 ^m , 08	25°

On en a déduit, par la méthode du n° 31, les résultats suivants :

γ .	σ_1 .	μ_0 .	μ_1 .	μ .	μ_1 en minutes.
0°	— 0'	25,0°	— 0,0	25,0°	— 0'
20	5	23,7	1	23,6	5
40	19	19,7	3	19,4	16
60	31	13,2	3	12,9	19
80	19	4,7	0	4,7	2
90	5	0,0	0	0,0	0

Ils sont représentés par ces courbes (*fig. 11*) :



On voit que l'influence de σ_1 sur μ est faible, montant au maximum à un peu plus de 0°,3; on aperçoit, en outre, vers 60°, un maximum de $-\sigma_1$, qui correspond à la position la plus abaissée du cadre. Il importe de la déterminer exactement.

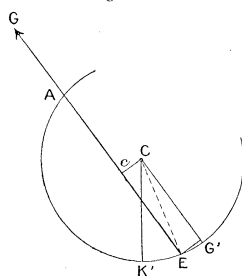
35. *Position la plus basse du cadre (fig. 12).* — L'axe AG du guidon coupe la circonférence de la roue mobile, vers le bas, au point E qui demeure toujours au-dessus du sol. L'axe et par suite le cadre seront

le plus bas possible quand le point E sera sur le sol, c'est-à-dire quand le point M sera au point E de la roue. On aura alors, d'après la figure,

$$\mu = G'E = \arcsin \frac{c}{R} = 12^{\circ}, 1.$$

Connaissant μ par cette formule (1), on tirera γ de l'équation (1)

Fig. 12.



(n° 50), où l'on doit remplacer σ par sa valeur minimum qu'il suffit d'emprunter à la première courbe du n° 52,

$$\sigma = 25^{\circ} - 0^{\circ}, 5 = 24^{\circ}, 5.$$

On trouve ainsi

$$\gamma = 61^{\circ}, 6.$$

Si, négligeant σ_1 , on avait remplacé σ par σ_0 , on aurait obtenu $\gamma = 62^{\circ}, 2$. L'erreur, comme on voit, eût été assez faible pour la question pratique peu précise qui nous occupe.

54. *Lieu des contacts de la roue mobile avec le sol.* — Toujours dans la même hypothèse où le cadre reste fixé dans la position verticale, subissant seulement les rotations σ_1 , je cherche le lieu des points de contact

(1) Elle peut aussi être obtenue au moyen des équations (1), (2), (3) (n° 50), en écrivant la condition de minimum $\frac{d\sigma}{d\gamma} = 0$.

de la roue mobile avec le sol. Je prends pour axes OI et OJ ; les coordonnées du point M sont

$$x = I|OM, \quad y = J|OM.$$

Ces valeurs se calculent au moyen des formules des n^{os} 46 et 47 en y faisant $\theta = 0$. La valeur de y est la plus simple

$$y = -(R \sin \mu - c) \sin \gamma,$$

et peut être obtenue directement sur la figure.

Pour x , on trouve

$$x = a \cos \sigma + (b + R \cos \mu) \sin \sigma + (c - R \sin \mu) \cos \sigma \cos \gamma,$$

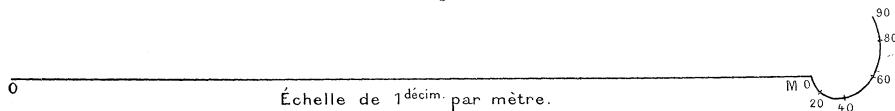
expression qu'on peut écrire, en remplaçant a et b par leurs valeurs (n^o 44),

$$x = l \cos \sigma_1 - c \cos \sigma (1 - \cos \gamma) + R \cos(\widehat{CM, OI}) \quad (\text{cf. n^o 49});$$

sous cette forme, elle peut être écrite immédiatement par la Géométrie.

Passons au calcul numérique des coordonnées x et y . D'abord y se calcule immédiatement, car, γ étant donné, μ est connu (n^{os} 31 et 32). Pour x ,

Fig. 13.



le calcul est aussi simple en théorie, car σ et μ sont connus en fonction de γ ; mais le calcul numérique est plus pénible et l'on peut varier les procédés de simplification. Quoi qu'il en soit, on peut négliger le second ordre de σ_1 ; le premier terme de l'expression de x se réduit ainsi à l , et il reste à calculer seulement l'excès de x sur l , savoir :

$$x - l = R \cos(\widehat{CM, OI}) - c \cos \sigma (1 - \cos \gamma).$$

La position du point M se trouve ainsi rapportée à celle du point M₀ prise pour origine. J'ai obtenu les résultats que voici (*fig.* 13).

γ .	$x - l$.	y .
0	+ 0,0	+ 0,0
20	1,2	+ 2,5
40	4,5	+ 3,0
60	8,7	+ 0,4
80	9,5	- 4,8
90	8,8	- 8,0

55. *Autre méthode pour établir les résultats de ce paragraphe.* — En traitant σ_1 comme un infiniment petit, la Géométrie infinitésimale permet de retrouver la valeur de σ_1 [équation (2)', n° 51] et généralement toutes les formules approchées relatives à ce paragraphe. J'ai appliqué cette méthode à titre de vérification de mes formules; je ne reporte pas ici les démonstrations qui alourdiraient l'exposition déjà un peu longue.

§ III. — CAS OU LE CADRE N'EST PAS VERTICAL ($\theta \neq 0$).

56. *Calcul de μ et σ .* — Les équations du problème, trouvées aux n°s 48 et 49, sont

$$(1) \left\{ \begin{aligned} 0 &= l \sin \sigma_1 - 2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \sigma \\ &+ R(1 - \cos \sigma \cos \mu - \sin \sigma \sin \mu \cos \gamma) + \text{tang } \theta \sin \gamma (c - R \sin \mu), \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad \text{tang } \mu = \text{tang } \sigma \cos \gamma + \frac{\text{tang } \theta \sin \gamma}{\cos \sigma}.$$

D'ailleurs le cadre a encore la position la plus basse quand c'est le point E qui touche le sol (n° 55); la valeur maximum de $-\sigma_1$ est alors la même +0°,5 que si le cadre était vertical, celui-ci n'ayant fait que tourner de l'angle θ autour de la trace OE de la bicyclette. Si l'on néglige la variation σ_1 de l'angle σ , on a immédiatement μ par la formule (2), où

l'on remplace σ par σ_0 . Voici une Table à double entrée des valeurs de μ ainsi calculées :

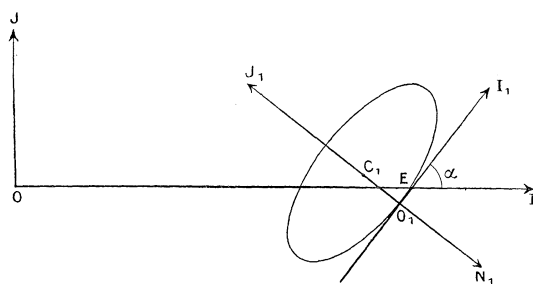
		Valeurs de θ .					
		0°.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
Valeurs de γ .	0°....	+25,0	+25,0	+25,0	+25,0	+25,0	+25,0
	20°....	+23,7	+20,6	+17,3	+13,3	+ 8,3	+ 1,3
	40°....	+19,6	+13,1	+ 5,6	+ 3,0	-13,4	-26,1
	50°....	+13,1	+ 3,5	- 7,0	-17,4		

Veut-on une valeur plus exacte de μ pour un système de valeurs données de θ et γ ? On prendra la première valeur approchée de μ dans la Table; on la portera dans l'équation (1) après avoir remplacé σ par $\sigma_0 + \sigma_1$ et tenu compte seulement des termes du premier ordre. L'équation (1) donne alors une valeur de σ_1 qui est déjà bonne puisque, μ correspondant au point le plus bas de la roue, une variation infiniment petite de μ donne pour σ une variation du second ordre. Il ne reste qu'à porter la correction σ_1 dans l'équation (2) pour avoir une valeur de μ très satisfaisante.

Avant de laisser ce Chapitre, nous allons calculer quelques grandeurs, qui nous seront utiles par la suite.

37. *Fonctions accessoires α et β .* — Soient (fig. 14) OEI la trace horizontale du cadre;

Fig. 14.



O_1I_1 celle de la roue directrice;

$O_1C_1J_1$ la projection du rayon de contact O_1C ; nous aurons à envisager les deux angles :

α , angle de $O_1 I_1$ avec OI ;
 β , angle de la roue avec la verticale.

Ces angles sont comptés positivement dans le sens de la chute à gauche et de la rotation à gauche ⁽¹⁾. Pour les calculer en fonction de θ, γ, σ , je vais identifier deux expressions de la normale unité CN à la roue d'avant. Le vecteur CN fait avec la verticale l'angle $\frac{\pi}{2} - \beta$; il est projeté sur le sol suivant un vecteur $C_1 N_1$ confondu, en direction, avec $C_1 O_1$. Il a donc pour expression

$$(1) \quad CN = I \cos \beta \sin \alpha - J \cos \beta \cos \alpha + K \sin \beta.$$

D'autre part, CN étant normal aux vecteurs G et H_1 , situés dans le plan de la roue mobile (n° 44), on a dans la notation de Grassmann (n° 1)

$$CN = |H_1 G,$$

ou, en remplaçant H_1 et G par leurs expressions du n° 47,

$$CN = [I \cos \sigma \cos \gamma + J(\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \sin \sigma) + K(\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \sigma)] \\ \times (-I \sin \sigma - J \sin \theta \cos \sigma + K \cos \theta \cos \sigma).$$

On doit développer ce produit suivant la règle de la multiplication algébrique, en respectant l'ordre des facteurs vectoriels, puis remplacer $|JK, |KI$ et $|IJ$ respectivement par I, J et K .

On obtient en définitive

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} CN = I \cos \sigma \sin \gamma - J(\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \sigma) \\ \quad \quad \quad + K(-\sin \theta \cos \gamma + \cos \theta \sin \gamma \sin \sigma). \end{array} \right.$$

Il ne reste qu'à identifier les expressions (1) et (2) du vecteur CN pour

(1) La gauche est, naturellement, celle du cavalier.

avoir les formules cherchées, savoir

$$\begin{aligned}\cos\beta \sin\alpha &= \cos\sigma \sin\gamma, \\ \cos\beta \cos\alpha &= \cos\theta \cos\gamma + \sin\theta \sin\gamma \sin\sigma, \\ \sin\beta &= -\sin\theta \cos\gamma + \cos\theta \sin\gamma \sin\sigma.\end{aligned}$$

Ces trois formules définissent α et β . Elles ne sont pas indépendantes. On vérifie que la somme des carrés des trois premiers membres et aussi celle des trois seconds membres sont égales à l'unité.

58. *Axes liés à la roue directrice.* — Comme pour la roue d'arrière, nous aurons à considérer pour la roue d'avant les axes :

- I_1 , tangente à la trajectoire de la roue d'avant dans le sens du mouvement ;
- J_1 , normale à la trajectoire, sur la gauche du cavalier ;
- $j_1 = -N$, axe de la roue, sur la gauche du cavalier ;
- k_1 , ligne de pente de la roue, vers le haut.

L'angle β du n° 57 correspond, au signe près, à l'angle θ défini au n° 1 ; pour cette raison, on remplacera β par $-\theta_1$, quand il y aura intérêt à faire ressortir une analogie entre les deux roues.

Les expressions des vecteurs I_1, J_1, j_1, k_1 sont

$$\begin{aligned}I_1 &= I \cos\alpha + J \sin\alpha, \\ J_1 &= -I \sin\alpha + J \cos\alpha, \\ \theta_1 = -\beta &\left\{ \begin{aligned} j_1 &= J_1 \cos\theta_1 + K \sin\theta_1 \\ &= -I \sin\alpha \cos\theta_1 + J \cos\alpha \cos\theta_1 + K \sin\theta_1, \\ k_1 &= -J_1 \sin\theta_1 + K \cos\theta_1 \\ &= +I \sin\alpha \sin\theta_1 - J \cos\alpha \sin\theta_1 + K \cos\theta_1. \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

58 bis. — *Changement de notation.* — Les lettres $\sigma, \sigma_0, \sigma_1$ ont été employées, dans le Chapitre I, pour désigner les angles relatifs à l'incli-

naison du cadre dans son plan. La rédaction du Chapitre terminée, je me suis aperçu que la symétrie des notations exigeait les mêmes lettres σ et σ_1 pour désigner les paramètres de roulement des roues. Il a fallu me résigner à demander au lecteur de vouloir bien faire le changement de notation qui consiste à remplacer les lettres σ , σ_0 , σ_1 du Chapitre I par les lettres η , η_0 , η_1 lesquelles seront désormais affectées aux angles de position du cadre dans son plan. De même, au Chapitre IV, je désignerai par ω l'angle qui est désigné par μ au Chapitre I, parce que la lettre μ sera employée pour désigner une masse.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES ET STATIQUES.

§ I. — CINÉMATIQUE DE LA BICYCLETTE.

59. *Degré de liberté de la bicyclette. Variables indépendantes.* — Nous avons vu (n° 44) que la position de la bicyclette par rapport au plan horizontal est définie par les angles θ et γ dont dépendent les angles η et μ . Si donc on fixe au sol le point de contact de la roue d'arrière, on ne pourra donner à la bicyclette que deux déplacements indépendants $\delta\theta$ et $\delta\gamma$. Si maintenant on rend la liberté au point de contact, un troisième déplacement devient possible, c'est le roulement de la roue motrice dont je désigne l'angle par $\delta\sigma$ et qui entraîne toute la bicyclette. Ainsi le degré de liberté est *trois* et les trois déplacements virtuels indépendants sont $\delta\theta$, $\delta\gamma$ et $\delta\sigma$.

60. — *Déplacements fonctions des trois déplacements fondamentaux.* — Les autres déplacements que nous aurons à envisager sont

$\delta\sigma_1$, rotation de roulement de la roue directrice autour de son axe C;

$\delta\nu$, angle de conversion du cadre, autour de OK;

$\delta\eta$, angle de relèvement du cadre dans son plan, autour de Sj.

Ils sont fonctions des trois premiers. En effet, si par la pensée on supprime la partie du sol sur laquelle repose la roue directrice, on peut donner à la bicyclette arbitrairement les six déplacements

$$\delta\sigma, \quad \delta\theta, \quad \delta\nu, \quad \delta\eta, \quad \delta\gamma, \quad \delta\sigma_1.$$

Le déplacement d'un point quelconque de la roue d'avant en résulte, en particulier le déplacement du point de contact M avec le sol. Pour exprimer que la roue directrice roule, on doit écrire que la vitesse du point M est nulle. Cela donne trois conditions qui permettent de calculer trois des déplacements élémentaires en fonction des trois autres.

61. Méthode analytique. — Pour calculer le déplacement δM du point de la roue directrice qui touche actuellement le sol, on a

$$(1) \quad \delta M = \delta O + \delta(M - O).$$

Or le déplacement du point O sur le sol se réduit à la vitesse de roulement $R\delta\sigma$ dirigée suivant la trace du cadre OI; il a pour expression

$$(2) \quad \delta O = IR \delta\sigma.$$

On calcule $\delta(M - O)$ par les formules du n° 46. Les directions k, H, G, H_1, y sont variables; le paramètre angulaire du point M de la roue est d'abord μ ; il augmente de $\delta\sigma_1$. Donc

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta(M - O) = R \delta k + a \delta H - (b + R \cos \mu) \delta G \\ \quad \quad \quad + (c - R \sin \mu) \delta H_1 + (G R \sin \mu - H_1 R \cos \mu) \delta \sigma_1. \end{array} \right.$$

Il reste à remplacer $\delta k, \delta H, \delta G$ et δH_1 par les valeurs qu'on déduit des formules du n° 47. Pour cela, je remarque d'abord que l'on a

$$\delta I = +J \delta \nu, \quad \delta J = -I \delta \nu, \quad \delta K = 0,$$

et j'en déduis

$$(4) \quad \left. \begin{aligned}
 + R \quad \delta k &= (-J \cos \theta - K \sin \theta) \delta \theta + I \sin \theta \delta v \\
 + a \quad \delta H &= (-J \cos \theta \sin \eta - K \sin \theta \sin \eta) \delta \theta \\
 &\quad + (J \cos \eta + I \sin \theta \sin \eta) \delta v \\
 &\quad + (-I \sin \eta - I \sin \theta \cos \eta + K \cos \theta \cos \eta) \delta \eta \\
 - (b + R \cos \mu) \quad \delta G &= (-J \cos \theta \cos \eta - K \sin \theta \cos \eta) \delta \theta \\
 &\quad + (-J \sin \eta + I \sin \theta \cos \eta) \delta v \\
 &\quad + (-I \cos \eta + J \sin \theta \sin \eta - K \cos \theta \sin \eta) \delta \eta \\
 (c - R \sin \mu) \quad \delta H_1 &= [-J(\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \eta) \\
 &\quad + K(\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \sin \eta)] \delta \theta \\
 &\quad + [J \cos \eta \cos \gamma - I(\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \sin \eta)] \delta v \\
 &\quad + (-I \sin \eta \cos \gamma - J \sin \theta \cos \gamma \cos \eta \\
 &\quad \quad + K \cos \theta \cos \gamma \cos \eta) \delta \eta \\
 &\quad + [-I \cos \eta \sin \gamma + J(\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \eta) \\
 &\quad \quad + K(\sin \theta \cos \gamma - \cos \theta \sin \gamma \sin \eta)] \delta \gamma.
 \end{aligned} \right\}$$

En égalant à zéro les coefficients de I, J, K dans l'expression de δM , on aurait trois équations capables de donner les trois inconnues $\delta \eta$, δv , $\delta \sigma_1$, mais on évitera les éliminations en projetant le déplacement δM sur trois axes convenablement choisis pour chacune des inconnues. Ainsi, pour calculer $\delta \eta$, on projette sur la verticale K. Les déplacements $\delta \sigma$, δv et $\delta \sigma_1$ n'imprimant au point M aucune composante verticale, disparaîtront de l'équation. Celle-ci fournira donc $\delta \eta$ en fonction de $\delta \theta$ et $\delta \gamma$. Il suffit d'annuler le coefficient de K dans l'expression de δM ; il vient

$$\begin{aligned}
 0 = K | \delta M &= [-R \sin \theta - a \sin \eta \sin \theta + (b + R \cos \mu) \sin \theta \cos \eta \\
 &\quad + (c - R \sin \mu)(\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \sin \eta)] \delta \theta \\
 &\quad + [a \cos \theta \cos \eta + (b + R \cos \mu) \cos \theta \sin \eta \\
 &\quad \quad + (c - R \sin \mu) \cos \theta \cos \gamma \cos \eta] \delta \eta \\
 &\quad + (c - R \sin \mu)(\sin \theta \cos \gamma - \cos \theta \sin \gamma \sin \eta) \delta \gamma \\
 &\quad + [R \sin \mu \cos \theta \cos \eta - R \cos \mu (\sin \theta \sin \gamma + \cos \theta \cos \gamma \sin \eta)] \delta \sigma_1.
 \end{aligned}$$

Comme il était prévu, le coefficient de $\delta\sigma$, est nul par la deuxième des conditions qui définissent le point de contact [éq. (2), n° 48]. L'équation donne alors $\delta\eta$, mais sous une forme compliquée qu'il importe de réduire.

Le coefficient de $\delta\theta$ est le coefficient de J dans l'expression qu'on peut déduire pour OM des formules des n°s 46 et 47; c'est y . Dans le coefficient de $\delta\eta$, on reconnaît que $\cos\theta$ est en facteur d'une expression qui n'est autre que la valeur du coefficient de I dans l'expression du vecteur OM , c'est-à-dire x . Enfin le coefficient de $\delta\gamma$ est le produit de $(R \sin\mu - c)$ par la valeur trouvée au n° 57 pour $\sin\beta$.

Ainsi l'équation trouvée pour déterminer $\delta\eta$ peut s'écrire d'une façon plus condensée

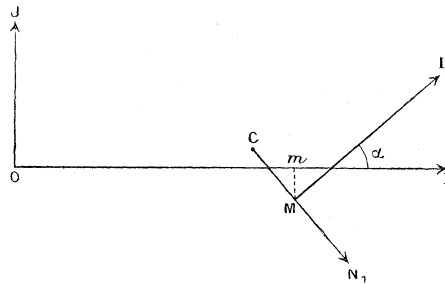
$$(\delta\eta) \quad y \delta\theta + x \cos\theta \delta\eta + (R \sin\mu - c) \sin\beta \delta\gamma = 0.$$

On trouverait d'une façon analogue les deux autres équations du problème.

62. *Méthode géométrique.* — On peut trouver les mêmes formules par la Géométrie, d'une façon plus simple.

Soient en effet (*fig. 15*) :

Fig. 15.



OI la trace du cadre,
M le point de contact de la roue directrice,
 $Om = x$, — $mM = y$ ses coordonnées,
MI, la tangente à la roue directrice en M.

Évaluons les déplacements imprimés au point M par les six rotations;

ce sont :

$\frac{\partial M}{\partial \sigma} \delta \sigma = IR \delta \sigma$, car, lorsque la roue motrice roule de $\delta \sigma$, la bicyclette avance de $R \delta \sigma$ suivant la tangente OI à la roue motrice;

$\frac{\partial M}{\partial \theta} \delta \theta = -K m M \delta \theta = +K_j \delta \theta$, car la rotation $\delta \theta$ se fait autour de OI , et de droite à gauche; elle imprime au point M une vitesse verticale dirigée vers le bas;

$\frac{\partial M}{\partial \nu} \delta \nu = (Jx - Iy) \delta \nu$, car la rotation $\delta \nu$ se fait autour de OK ; elle imprime au point M une vitesse horizontale, perpendiculaire au bras de levier OM de la rotation;

$\frac{\partial M}{\partial \eta} \delta \eta = | -j \delta \eta (M - S) \text{ (} ^1 \text{)},$ car la rotation $\delta \eta$ se fait autour de Sj ; mais elle est comptée positivement de gauche à droite; le bras de levier de la rotation est SM ;

$\frac{\partial M}{\partial \gamma} \delta \gamma = N(R \sin \mu - c) \delta \gamma$, car la rotation $\delta \gamma$ se fait autour de l'axe du guidon BG ; la vitesse du point M est dirigée suivant la normale N à la roue; bras de levier $(R \sin \mu - c)$ (n° 33, fig. 12);

$\frac{\partial M}{\partial \sigma_1} \delta \sigma_1 = -I_1 R \delta \sigma_1$, car lorsque la roue directrice tourne de $\delta \sigma_1$, M reçoit un déplacement $R \delta \sigma_1$ dirigé suivant la tangente et dans le sens arrière. (C'est ce déplacement en arrière qui compense le mouvement en avant du point C et permet au point M d'avoir une vitesse nulle).

Le déplacement δM est la somme géométrique des six déplacements qu'on vient de trouver; on aura les trois équations du mouvement en écrivant que cette somme est nulle.

63. Calcul de $\delta \eta$. — On égale à zéro la projection de δM sur la direction K . Or, d'après le numéro précédent, les déplacements $\delta \sigma$, $\delta \nu$, $\delta \sigma_1$ donnent aucune composante suivant K et l'équation se réduit à

$$j \delta \theta - [K_j (M - S)] \text{ (} ^1 \text{)} \delta \eta + K | N \text{ (} ^1 \text{)} (R \sin \mu - c) \delta \gamma = 0.$$

(¹) Notation de Grassmann (nos 1 et 6); [A. B. C] représente le parallélépipède dont les trois arêtes sont A, B, C.

Pour calculer le coefficient de $\delta\eta$, nous avons successivement

$$\begin{aligned} -[Kj(M-S)] &= -[KJ \cos\theta(Ix + Jy - kR)] \\ &= -[KJI] x \cos\theta = + x \cos\theta. \end{aligned}$$

Quant à $K|N$, c'est le cosinus de l'angle \widehat{KN} , qui n'est autre que $\frac{\pi}{2} - \beta$ (cf. n° 58). On retrouve bien ainsi l'équation du n° 61, savoir

$$(\delta\eta) \quad y \delta\theta + x \cos\theta \delta\eta + (R \sin\mu - c) \sin\beta \delta\gamma = 0.$$

64. *Calcul de $\delta\nu$.* — On éliminera $\delta\sigma$, en projetant δM sur la direction N_1 , projection horizontale de la normale N à la roue,

$$N_1 = I \sin\alpha - J \cos\alpha.$$

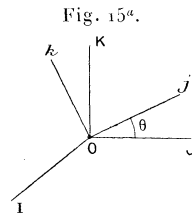
Les projections des six déplacements du n° 62 sont respectivement

pour $\delta\sigma$	$R \sin\alpha \delta\sigma$
» $\delta\theta$	zéro
» $\delta\nu$	$(-y \sin\alpha - x \cos\alpha) \delta\nu$
» $\delta\eta$	$-[N_1 j(M-S)] \delta\eta$
» $\delta\gamma$	$(R \sin\mu - c) \cos\beta \delta\gamma$
» $\delta\sigma_1$	zéro

Seul le coefficient de $\delta\eta$ reste à expliciter. Pour cela, on a successivement

$$\begin{aligned} -[N_1 j(M-S)] &= +[j(I \sin\alpha - J \cos\alpha)(Ix + Jy - kR)] \\ &= [j(IJ(y \sin\alpha + x \cos\alpha) + (J \cos\alpha - I \sin\alpha)kR)] \\ &= \sin\theta(y \sin\alpha + x \cos\alpha) + R \sin\alpha \quad (1). \end{aligned}$$

(1) On a en effet intuitivement



$$[jIJ] = \sin\theta, \quad [jJk] = 0, \quad -[jIk] = +[Ijk] = +1 \quad (\text{fig. 15}^a).$$

En résumé, nous avons pour déterminer δv l'équation

$$(\delta v) \quad 0 = R \sin \alpha \delta \sigma - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \delta v \\ + [\sin \theta (y \sin \alpha + x \cos \alpha) + R \sin \alpha] \delta \eta + R (\sin \mu - c) \cos \beta \delta \gamma.$$

65. Calcul de $\delta \sigma_1$. — Il convient ici de projeter δM sur la direction de la tangente $I_1 = I \cos \alpha + J \sin \alpha$.

Les six déplacements donnent respectivement

$$\begin{array}{ll} \delta \sigma \dots\dots\dots & R \cos \alpha \delta \sigma \\ \delta \theta \dots\dots\dots & \text{zéro} \\ \delta v \dots\dots\dots & (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \delta v \\ \delta \eta \dots\dots\dots & - [I_1 j (M - S)] \delta \eta \\ \delta \gamma \dots\dots\dots & \text{zéro} \\ \delta \sigma_1 \dots\dots\dots & - R \delta \sigma_1 \end{array}$$

Comme au n° 64, on calcule le coefficient de $\delta \eta$ et l'on trouve

$$- [I_1 j (M - S)] = \sin \theta (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + R \cos \alpha.$$

On peut observer que ce coefficient de $\delta \eta$ et celui du n° 64 s'interprètent en considérant le déplacement du point M comme résultant de deux autres, celui que subirait le point O lié au cadre ($R \delta \eta$ dirigé suivant I) et celui que subirait le point M dans la rotation $\delta \eta$ transportée du point S au point O.

L'équation qui donne $\delta \sigma_1$ est, en résumé,

$$(\delta \sigma_1) \quad R \cos \alpha \delta \sigma + (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \delta v \\ + [\sin \theta (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + R \cos \alpha] \delta \eta - R \delta \sigma_1 = 0.$$

66. Résumé des résultats. Relations entre les vitesses. — Nous avons trouvé entre les six déplacements $\delta \sigma$, $\delta \theta$, $\delta \gamma$, $\delta \sigma_1$, δv , $\delta \eta$ les trois

relations

$$(\delta) \left\{ \begin{array}{l} (\delta\eta) \quad y \delta\theta + x \cos\theta \delta\eta + (R \sin\mu - c) \sin\beta \delta\gamma = 0, \\ (\delta\nu) \quad R \sin\alpha \delta\sigma - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) \delta\nu \\ \quad + [\sin\theta(y \sin\alpha + x \cos\alpha) + R \sin\alpha] \delta\eta + (R \sin\mu - c) \cos\beta \delta\gamma = 0, \\ (\delta\sigma_1) \quad R \cos\alpha \delta\sigma + (x \sin\alpha - y \cos\alpha) \delta\nu \\ \quad + [\sin\theta(y \cos\alpha - x \sin\alpha) + R \cos\alpha] \delta\eta - R \delta\sigma_1 = 0. \end{array} \right.$$

Pour avoir les relations correspondantes entre les vitesses, il suffit de remplacer les déplacements virtuels

$$\delta\sigma, \quad \delta\theta, \quad \delta\gamma, \quad \delta\sigma_1, \quad \delta\nu, \quad \delta\eta$$

par les vitesses correspondantes

$$s, \quad p, \quad \gamma', \quad \sigma_1', \quad n, \quad \eta'.$$

On a ainsi, pour définir σ_1' , n et η' en fonction des trois autres rotations, les trois formules

$$\begin{aligned} (\eta') \quad & y p + x \cos\theta \eta' + (R \sin\mu - c) \sin\beta \gamma' = 0, \\ (n) \quad & R \sin\alpha s - (x \cos\alpha + y \sin\alpha) n \\ & + [\sin\theta(y \sin\alpha + x \cos\alpha) + R \sin\alpha] \eta' + (R \sin\mu - c) \cos\beta \gamma' = 0, \\ (\sigma_1') \quad & R s \cos\alpha + (x \sin\alpha - y \cos\alpha) n \\ & + [\sin\theta(y \cos\alpha - x \sin\alpha) + R \cos\alpha] \eta' - R \sigma_1' = 0. \end{aligned}$$

Des équations (δ) on tire les formules

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-y}{x \cos\theta}; \quad \frac{d\nu}{d\theta} = \frac{-y[\sin\theta(x \cos\alpha + y \sin\alpha) + R \sin\alpha]}{x \cos\theta(x \cos\alpha + y \sin\alpha)}, \\ \frac{d\eta}{d\gamma} = -\frac{(R \sin\mu - c) \sin\beta}{x \cos\theta}; \quad \frac{d\nu}{d\gamma} = \frac{R \sin\mu - c}{x \cos\alpha + y \sin\alpha} \left[\cos\beta - \sin\beta \frac{\sin\theta(x \cos\alpha + y \sin\alpha) + R \sin\alpha}{x \cos\theta} \right], \end{array} \right.$$

dont on fera usage plus loin.

De leur côté, les relations entre les vitesses donnent, dans le cas particulier d'un état de régime $0 = p = \gamma' = \tau'$,

$$(2) \quad \begin{cases} n = \frac{R \sin \alpha}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} s \\ \sigma'_1 = \frac{x}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} s \end{cases} \quad (0 = p = \gamma' = \tau').$$

Ces dernières formules se vérifient aisément par la Géométrie.

66 bis. *Les trois rotations principales de la roue directrice.* — Avec les axes principaux I_1, j_1, k_1 introduits au n° 38, nous aurons à considérer les trois rotations principales p_1, q_1, r_1 , puis les vitesses de conversion et de marche de la roue directrice n_1 et s_1 ⁽¹⁾ qui leur sont liées par les formules du n° 2,

$$(1) \quad \begin{cases} q_1 = s_1 + n_1 \sin \theta_1 \\ r_1 = n_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (\theta_1 = -\beta, \text{ cf. n° 38}).$$

Ces rotations de la roue directrice sont déterminées en fonction des vitesses définies aux nos 39 et 60 par l'égalité vectorielle

$$(2) \quad I_1 p_1 + j_1 s_1 + K n_1 = I p + K n - j \tau' + G \gamma' + j_1 \sigma'_1.$$

On pourrait être tenté de barrer les deux termes $j_1 s_1$ et $j_1 \sigma'_1$ qui, au premier abord, peuvent sembler se détruire comme identiques. Cependant, il y a une distinction à faire entre la vitesse de roulement sur le sol s_1 et la vitesse de roulement sur les billes σ'_1 . Ces deux vitesses diffèrent par la vitesse de la fourche dans son plan qui est μ' .

L'équation vectorielle (2) est équivalente à trois équations numériques qu'on obtient en projetant respectivement sur I_1, J_1 et K .

⁽¹⁾ Une distinction doit être établie entre σ'_1 , vitesse de roulement sur les billes, et s_1 , vitesse de roulement sur le sol; elles ne sont pas rigoureusement égales.

Projection sur I_1 :

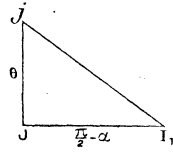
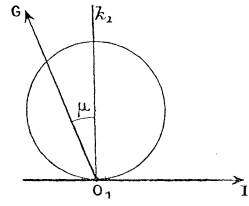
$$p_1 = p I|I_1 - r' j|I_1 + \gamma' G|I_1 ;$$

les coefficients de projection sont d'ailleurs les suivants : d'abord

$$I|I_1 = \cos \alpha.$$

D'autre part, dans le triangle sphérique jJI_1 , rectangle en J, on a

$$j|I_1 = \cos jI_1 = \cos jJ \cos JI_1 = \cos \theta \sin \alpha \text{ (fig. 15}^b\text{)}.$$

Fig. 15^b.Fig. 15^c.

Enfin l'angle $\widehat{GI_1}$ a pour valeur $\mu + \frac{\pi}{2}$, de sorte que l'on a (fig. 15^c)

$$G|I_1 = \cos\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \mu.$$

En résumé, p_1 est donné par la formule

$$(3) \quad p_1 = p \cos \alpha - r' \cos \theta \sin \alpha - \gamma' \sin \mu.$$

Les projections sur J_1 et K_1 conduisent à des calculs tout à fait analogues et l'on obtient, pour déterminer p_1, s_1, n_1 , le système des trois équations

$$(I) \quad \begin{cases} p_1 = p \cos \alpha - r' \cos \theta \sin \alpha - \gamma' \sin \mu, \\ s_1 \cos \theta_1 = -p \sin \alpha - r' \cos \theta \cos \alpha - \gamma' \cos \mu \sin \theta_1 + \sigma'_1 \cos \theta_1, \\ s_1 \sin \theta_1 + n_1 = n - r' \sin \theta + \gamma' \cos \theta_1 \cos \mu + \sigma'_1 \sin \theta_1. \end{cases}$$

A l'état de régime, ces formules se réduisent aux formules évidentes

$$(II) \quad \begin{cases} p_1 = 0, \\ s_1 = \sigma'_1 = \frac{x}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} s & (\text{éq. 2, n}^\circ 66), \\ n_1 = n = \frac{R \sin \alpha}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} s & (\textit{ibid.}). \end{cases}$$

§ II. — APPLICATION DES FORMULES A L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE AU REPOS.

67. *Position d'équilibre du guidon, pour un angle donné θ .* — La bicyclette partant de la position normale, inclinons le cadre de θ , en laissant libres le guidon et la roue d'avant. Celle-ci, qui est au départ dans une position d'équilibre instable, va tourner autour du guidon et prendre une position d'équilibre stable. Si l'on néglige le poids de la roue directrice devant celle du cadre, ce qui est suffisamment exact quand la bicyclette est chargée d'un cavalier, la position d'équilibre est celle qui donne au cadre la position la plus basse dans son plan (n° 55).

Si l'on tient compte de la roue directrice, on doit remarquer qu'à partir de la position définie au n° 55, une augmentation de l'angle de guidon γ tend à abaisser légèrement la roue directrice (en supposant le cadre fixe); mais ce mouvement remonte le cadre dans son plan, de sorte qu'il s'établira bientôt une compensation et la position d'équilibre est voisine de celle du n° 55, sinon confondue avec elle. Je ne m'attarderai pas à rechercher une solution rigoureuse qui n'a pas d'intérêt pour la suite.

68. *Paradoxe de la fixation de la bicyclette.* — Par les formules du n° 66, on peut calculer trois des déplacements δ en fonction linéaire des trois autres, et il en résulte que, si trois d'entre eux sont nuls, les trois autres sont aussi nuls. Cependant il y a une exception qui, si elle n'est pas constatée, conduit à un paradoxe. Supposons, en effet, que le cavalier serre le frein, fixe le guidon dans un azimut γ et maintienne le pédalier invariable par rapport au cadre. Trois des déplacements δ sont ainsi

annulés; on est tenté d'en conclure que tous les δ sont nuls. La bicyclette serait alors fixée dans une position invariable. Ainsi le cavalier se maintiendrait au repos, non seulement en équilibre, mais avec l'impossibilité cinématique de tomber. Ces conséquences entraîneraient une grande sécurité pour le cavalier; elles sont malheureusement inexactes, comme on va voir.

Si la roue motrice roule *sur le sol* de $\delta\sigma$, et que le cadre s'élève de $\delta\eta$, la roue a roulé *sur ses billes*, c'est-à-dire par rapport au cadre de $\delta\sigma + \delta\eta$. Maintenir le pédalier fixe, c'est annuler la rotation $\delta\sigma + \delta\eta$. Le cavalier annule en outre les déplacements $\delta\gamma$ et $\delta\sigma$, par le guidon et le frein. Je dois donc faire, dans les équations (δ) (n° 66),

$$\delta\sigma = -\delta\eta, \quad \delta\gamma = \delta\sigma_1 = 0.$$

Les équations (δ) deviennent

$$\begin{aligned} y \delta\theta + x \cos\theta \delta\eta &= 0, \\ -(x \cos\alpha + y \sin\alpha) \delta\nu + \sin\theta (x \cos\alpha + y \sin\alpha) \delta\eta &= 0, \\ (x \sin\alpha - y \cos\alpha) \delta\nu - \sin\theta (x \sin\alpha - y \cos\alpha) \delta\eta &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières équations sont identiques à un facteur près, et le système se réduit aux deux équations

$$\begin{aligned} y \delta\theta + x \cos\theta \delta\eta &= 0, \\ -\delta\nu + \sin\theta \delta\eta &= 0. \end{aligned}$$

Elles définissent $\delta\eta$ et $\delta\nu$ en fonction de $\delta\theta$ qui demeure arbitraire.

Ainsi la chute est libre, contrairement aux premières apparences du calcul et conformément à l'expérience. Ce résultat nous conduit à étudier l'équilibre au repos, auquel on voit s'exercer quelques cyclistes.

69. Équilibre de la bicyclette au repos. — Je suppose, comme au numéro précédent, le frein serré, le pédalier arrêté, le guidon maintenu fixe. Toute position de la bicyclette qui place le centre de gravité G sur la ligne

d'appui OM est une position d'équilibre. Peut-on en trouver une qui soit stable ?

Le problème, ainsi posé dans toute sa généralité, conduit à des calculs compliqués, pour une question où la réponse est négative, comme je vais en donner la certitude, s'il est permis d'employer cette expression quand on ne fournit pas la preuve mathématique basée sur une analyse complète.

Quand la bicyclette est droite, dans sa position normale de la *fig. 9 bis*, l'équilibre est essentiellement instable, puisque l'abaissement du centre de gravité dû à la rotation autour de OM ne peut recevoir aucune compensation. Un relèvement de la bicyclette ne peut venir que du déplacement du point de contact de la roue directrice; on est ainsi conduit à étudier le cas simple où le cadre est le plus bas possible ($\gamma = 61^\circ, 6$), (n° 35), le cadre étant vertical et le centre de gravité dans le plan du cadre. Cette position est d'équilibre; nous allons voir qu'elle est instable.

Fixez le guidon dans l'azimut actuel ($\gamma = 61^\circ, 6$); puis, autour de S, relevez le cadre d'un angle égal à son abaissement actuel $-\eta_1$, de façon à le ramener dans sa position normale η_0 . Dans cette position fictive de la bicyclette, soient G son centre de gravité; x, z les coordonnées de G par rapport l'horizontale et à la verticale de S. La cote du point G, dans une position quelconque, définie par les paramètres θ et η_1 , est

$$(1) \quad Z = (R + x \sin \eta_1 + z \cos \eta_1) \cos \theta \quad (1).$$

Je dois étudier les deux premières dérivées totales $\frac{dZ}{d\theta}, \frac{d^2Z}{d\theta^2}$, la quantité $\eta_1 = \eta - \eta_0$ étant une fonction de θ définie au n° 36.

On a d'abord, en désignant par η' la dérivée de η par rapport à θ ,

$$(2) \quad \frac{dZ}{d\theta} = \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{\partial Z}{\partial \eta_1} \eta',$$

$$(3) \quad \frac{d^2Z}{d\theta^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta_1 \partial \theta} \eta' + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta_1^2} \eta'^2 + \frac{\partial Z}{\partial \eta_1} \eta'';$$

(1) Il est essentiel de distinguer les coordonnées X, Z relatives à une position quelconque θ de la bicyclette des coordonnées x, z relatives à la position initiale $\theta = 0$.

Dans cette dernière formule, il reste à remplacer μ' par sa valeur tirée de la formule (6), savoir :

$$(9) \quad \frac{\mu'}{\cos^2 \mu} = \eta' \frac{d \operatorname{tang} \eta}{d \eta} \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \theta \cos \eta}.$$

Dans les formules précédentes, je dois remplacer les lettres par les valeurs qu'elles prennent dans le cas particulier qui nous occupe.

Or μ est défini par la condition

$$R \sin \mu - c = 0 \quad (\text{n}^\circ 55).$$

La formule (7) donne alors

$$\eta' = 0,$$

et la formule (8) devient, en remplaçant μ' par sa valeur (9) et $\cos \theta$ par 1,

$$\lambda \eta'' = R \cos \mu \frac{\cos^2 \mu \sin \gamma}{\cos \eta}.$$

En résumé, dans les formules (2), (3), (4), on doit faire

$$0 = \theta = \eta', \quad \eta'' = \frac{R \cos^3 \mu \sin \gamma}{\lambda \cos \eta},$$

ce qui donne

$$\frac{dZ}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = -Z + (x \cos \eta_1 - z \sin \eta_1) \frac{R \cos^3 \mu \sin \gamma}{\lambda \cos \eta}.$$

Or $x \cos \eta_1 - z \sin \eta_1$ est la coordonnée actuelle X du centre de gravité.

La dernière formule s'écrit donc

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = -Z + \frac{XR \cos^3 \mu \sin \gamma}{\lambda \cos \eta}.$$

Dans la pratique, la cote Z du centre de gravité est toujours supérieure à R ; l'abscisse X est toujours inférieure à $OM = \lambda$. Donc le second terme

de $\frac{d^2Z}{d\theta^2}$ est toujours inférieur au premier. La dérivée seconde $\frac{d^2Z}{d\theta^2}$ est ainsi toujours négative. Il en résulte que la cote Z diminue et que la position d'équilibre est instable. Le cavalier diminue l'instabilité en se baissant et se portant en avant (¹). Le résultat est trop net dans le sens de l'instabilité pour permettre de trouver un équilibre stable en dehors du cas que nous avons examiné.

La certitude, comme je l'avais annoncé, est ainsi acquise sur un cas particulier relativement simple.

NÉCESSITÉ DE NOUVELLES MÉTHODES POUR L'ÉTUDE DYNAMIQUE
DE LA BICYCLETTE.

70. Il reste à étudier le mouvement de la bicyclette et la stabilité de ce mouvement.

On peut mettre le problème en équations par les méthodes que j'ai suivies pour le cerceau et le monocycle. La complication des écritures devient cependant considérable. On doit songer aux équations de Lagrange, qui simplifient généralement cette recherche ; elles ne sont malheureusement pas applicables sans modification.

Quant à l'artifice qui a permis d'étudier la stabilité des premiers appareils, il échoue dans le cas de la bicyclette.

Il convient donc, avant d'aborder le problème si compliqué de la bicyclette, d'étudier d'abord les méthodes qui peuvent vaincre les difficultés. J'appliquerai ces méthodes au cerceau et au monocycle.

On aura ainsi une vérification (et même un complément) des résultats obtenus précédemment, puis un contrôle des nouvelles méthodes.

(¹) Il est évident qu'il changerait l'instabilité en stabilité s'il pouvait se transporter au point M lui-même, puisque le point M ne peut que monter.

CHAPITRE III.

NOUVELLES MÉTHODES.

§ I. — ADAPTATION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE A LA MISE
EN ÉQUATIONS DES PROBLÈMES DU MONOCYCLE ET DU CERCEAU.

71. *Les équations de Lagrange ne sont pas applicables aux paramètres choisis.* — On peut assimiler à des coordonnées les trois paramètres

θ , angle de chute dont la vitesse est $\theta' = p$.
 ν , angle de conversion dont la vitesse est $\nu' = n$,
 σ , angle de roulement dont la vitesse est $\sigma' = s$.

Cependant, il faut bien remarquer qu'ils ne forment pas un système de coordonnées proprement dit. Et, en effet, quand on donne les paramètres θ , ν et σ , cela ne suffit pas pour définir la position actuelle du système (cerceau ou monocycle). Il faut, en outre, donner la loi des variations corrélatives de σ et ν pour bien préciser la position du point de contact O avec le sol. Pour cette raison, il serait incorrect d'appliquer aux paramètres θ , ν , σ les équations de Lagrange. On peut vérifier qu'elles conduisent à un résultat inexact; ainsi, pour le cerceau, par exemple, la double force vive est

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap^2 + B(s + n \sin \theta)^2 + Cn^2 \cos^2 \theta,$$

et les équations de Lagrange s'écrivent, *incorrectement*,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \mu g R \sin \theta; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \nu'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial \nu} = 0; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0.$$

Ces formules conduisent à trois équations dont la première coïncide avec

le n° 7; mais les deux dernières sont incompatibles avec celles du n° 7. On peut voir où est la faute, et remplacer les formules de Lagrange, inexactes dans notre cas, par des formules correctes. Il nous suffira de reproduire la transformation de Lagrange.

72. *Modification des équations de Lagrange.* — Pour le déplacement virtuel $\delta\theta = 1$, le travail des forces d'inertie est donné par l'expression

$$(1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \sum m M'' \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \right|,$$

où M est un point quelconque, de masse m , appartenant au système $\frac{\partial M}{\partial \theta}$, son déplacement virtuel pour $\delta\theta = 1$ et M'' son accélération.

La transformation de Lagrange a pour but de calculer cette expression en fonction des vitesses : on évite ainsi les difficultés relatives au calcul des accélérations. On peut écrire

$$(2) \quad M'' \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \right| = \left(M' \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \right| \right)' - M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)' \right|.$$

Or la vitesse du point M est

$$M' = \frac{\partial M}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial M}{\partial \nu} \nu' + \frac{\partial M}{\partial \sigma} \sigma',$$

d'où l'on tire, en considérant M' comme une fonction linéaire de θ' , ν' , σ' ,

$$\frac{\partial M'}{\partial \theta'} = \frac{\partial M}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \nu'} = \frac{\partial M}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \sigma'} = \frac{\partial M}{\partial \sigma}.$$

La première de ces trois formules permet de remplacer $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ par $\frac{\partial M'}{\partial \theta'}$ dans le premier terme du second membre de l'équation (2). Ce premier terme devient $\left(M' \left| \frac{\partial M'}{\partial \theta'} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M'^2}{\partial \theta'} \right)'$ et la formule (2) devient

$$M'' \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M'^2}{\partial \theta'} \right)' - M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)' \right|.$$

En portant cette expression de $M'' \left| \frac{\partial M}{\partial \theta} \right.$ dans la formule (1), on a

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta'} \left(\frac{1}{2} \sum m M'^2 \right) \right]' - \sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)' \right. = \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right)' - \sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)' \right.$$

Cette transformation s'applique de même aux paramètres ν et σ .

Une deuxième transformation de Lagrange consiste à remplacer $\left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)'$ par $\frac{\partial M'}{\partial \theta}$ dans le deuxième terme de l'expression (3), qui s'écrit alors

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right)' - \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

Cette deuxième transformation, vraie ici pour le paramètre θ , serait fautive pour les paramètres ν et σ .

On a, en effet,

$$M = O + (M - O) = O + \text{fonct.}(\nu, \theta).$$

Or le point O dépend de la succession des valeurs de ν et σ , mais nullement de θ ; il donnera un résultat nul dans les deux dérivées

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)' \quad \text{et} \quad \frac{\partial M'}{\partial \theta}.$$

Seuls resteront les termes qui proviennent du vecteur $M - O = \text{fonct.}(\nu, \theta)$.

On sait qu'une propriété d'une telle fonction est qu'on peut intervertir les dérivées par rapport au temps t et à l'angle θ ; on a donc bien

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \theta} \right)' = \frac{\partial M'}{\partial \theta}.$$

La relation analogue serait fautive pour les variables ν et σ , à cause de la présence du point O qui est fonction, non pas seulement des valeurs de ν et σ à l'époque t , mais de la succession de leurs valeurs antérieures.

En résumé, il faut, dans notre cas, remplacer les équations de Lagrange

par celles-ci :

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} \right)' - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \mu g R \sin \theta, & (\theta) \\ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu'} \right)' - \sum m M' \left(\frac{\partial M}{\partial \nu'} \right)' = 0, & (\nu) \\ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma'} \right)' - \sum m M' \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma'} \right)' = 0. & (\sigma) \end{cases}$$

75. *Application au cerceau des équations de Lagrange modifiées.* — J'ai d'abord

$$2\Gamma = Ap^2 + B(s + n \sin \theta)^2 + Cn^2 \cos^2 \theta$$

et j'en déduis

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p} = Ap,$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu'} = \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = B \sin \theta (s + n \sin \theta) + Cn \cos^2 \theta = Bs \sin \theta + n(C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta),$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma'} = \frac{\partial \Gamma}{\partial s} = B(s + n \sin \theta),$$

puis

$$(\mathbf{I}) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} \right)' = Ap', \\ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu'} \right)' = Bs' \sin \theta + (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)n' \\ \quad + Bps \cos \theta + 2(B - C)pn \sin \theta \cos \theta, \\ \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma'} \right)' = Bs' + Bn' \sin \theta + Bpn \cos \theta. \end{cases}$$

Tels sont les termes de la première colonne des équations (\mathcal{L}). Pour le second terme de la première équation (θ), j'ai

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} &= B(s + n \sin \theta)n \cos \theta - Cn^2 \sin \theta \cos \theta \\ &= Bsn \cos \theta + (B - C)n^2 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

de sorte que la première des équations (ℓ) donne bien, comme au n° 7,

$$(\theta) \quad Ap' - Bsn \cos \theta - (B - C)n^2 \sin \theta \cos \theta = \mu g R \sin \theta. \quad (\theta)$$

Le calcul du second terme est un peu plus difficile pour les deux autres équations. On a successivement, pour l'équation (ν),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial \nu}\right) &= |K(M - O), \\ \left(\frac{\partial M}{\partial \nu}\right)' &= |K(M' - O'), \\ M' \left|\left(\frac{\partial M}{\partial \nu}\right)'\right. &= - [M'KO'], \end{aligned}$$

d'où l'on déduit enfin

$$- \sum m M' \left|\left(\frac{\partial M}{\partial \nu}\right)'\right. = + \left[\sum m M' K O' \right].$$

Or on a

$$\begin{aligned} \sum m M' &= \mu S' = \mu R k' = \mu R (-jp + In \sin \theta) \quad (\text{n° 5}), \\ O' &= IRs, \end{aligned}$$

et par suite

$$- \sum m M' \left|\left(\frac{\partial M}{\partial \nu}\right)'\right. = - \mu R^2 ps [jKI] = - \mu R^2 ps \cos \theta.$$

Il ne reste qu'à ajouter cette quantité à la deuxième des expressions (ι) pour avoir le premier membre de l'équation (ν), savoir

$$\begin{aligned} (\nu) \quad B s' \sin \theta + (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n' \\ + (B - \mu R^2) ps \cos \theta + 2(B - C)pn \sin \theta \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Plus compliqué encore est le calcul du second terme de la troisième équation (σ). On a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \sigma} &= |j(M - O), \quad \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)' = |j'(M - O) + |jM' - |jO', \\ M' \left|\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)'\right. &= [M'j'(M - O)] + [M'jM'] + [M'jO']. \end{aligned}$$

Le second terme de cette formule est visiblement nul, puisque c'est un parallélépipède dont deux arêtes sont confondues. La formule peut alors s'écrire, en remplaçant, dans le premier terme, j' par sa valeur $\rho k - Ir$ (n° 5) et sommant pour tous les points M du cerceau

$$\begin{aligned} \sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma} \right)' \right. &= \rho \sum m [k(M - O) M'] \\ &\quad - r \sum m [I(M - O) M'] \\ &\quad + \sum m [M' j O']. \end{aligned}$$

On vérifie simplement que le dernier terme est nul. Quant au coefficient de ρ , c'est le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe k : c'est Cr . De même le coefficient de $-r$ est $A\rho$. Ainsi l'on a

$$- \sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma} \right)' \right. = (A - C)pr.$$

En ajoutant ce résultat à celui des formules (1), on a pour l'équation (σ);

$$Bs' + Bn' \sin \theta + Bpn \cos \theta + (A - C)pr = 0,$$

ce qu'on peut écrire, en remplaçant r par sa valeur $n \cos \theta$ (n° 2)

$$(\sigma) \quad Bs' + Bn' \sin \theta + (B + A - C)pn \cos \theta = 0.$$

L'équation (σ) reproduit la deuxième des trois équations du n° 7; l'équation (ν) est la combinaison qu'on obtient en multipliant la deuxième par $\sin \theta$, la troisième par $\cos \theta$ et ajoutant.

74. *Application au monocycle.* — Le travail virtuel de l'inertie de la roue étant traité dans le numéro précédent, il suffit de considérer le cavalier. C'est, si l'on veut, le cas du monocycle infiniment léger. Soient M un point du cavalier, m sa masse. La vitesse est (n° 22)

$$M' = IRs + |\Phi(M - O).$$

Si je désigne par P et Q les composantes IRs et $|\Phi(M - O)$, j'ai, pour le carré de la vitesse,

$$M'^2 = P^2 + Q^2 + 2P|Q,$$

et, pour la double force vive totale,

$$\sum m M'^2 = \sum m P^2 + \sum m Q^2 + 2 \sum m P|Q.$$

Le premier terme a pour valeur

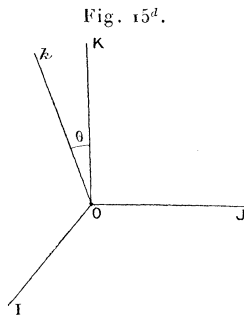
$$\sum m P^2 = \mu R^2 s^2;$$

le second terme est la force vive due à la rotation Φ (n° 22); elle a pour expression

$$\sum m Q^2 = A p^2 + B n^2 \sin^2 \theta + C n^2 \cos^2 \theta,$$

en adoptant pour les constantes du cavalier les notations et hypothèses du n° 21, avec $L = 0$ (n° 33).

Enfin le troisième terme a pour valeur



$$\begin{aligned} \sum m P|Q &= \sum m R s [I \Phi(M - O)] \\ &= \mu R h s [I(I p + K n)k] \quad (\text{n° 22}). \\ &= \mu R h s n \sin \theta \end{aligned}$$

En résumé, la double force vive a pour expression

$$2T = \mu R^2 s^2 + A p^2 + (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n^2 + 2 \mu R h s n \sin \theta.$$

De là on déduit pour les premiers termes des équations (ℓ)

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{\partial T}{\partial p} = A p,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu'} = \frac{\partial T}{\partial n} = (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n + \mu R h s \sin \theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma'} = \frac{\partial T}{\partial s} = \mu R^2 s + \mu R h n \sin \theta;$$

puis

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right)' = A p', \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \nu'} \right)' = (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n' + \mu R h s' \sin \theta \\ \quad + 2(B - C) p n \sin \theta \cos \theta + \mu R h p s \cos \theta, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma'} \right)' = \mu R^2 s' + \mu R h n' \sin \theta + \mu R h p n \cos \theta. \end{array} \right.$$

Le deuxième terme de la première équation (ℓ) est

$$- \frac{\partial T}{\partial \theta} = - (B - C) n^2 \sin \theta \cos \theta - \mu R h s n \cos \theta,$$

de sorte que la première des équations (ℓ) est

$$(\theta) \quad A p' - (B - C) n^2 \sin \theta \cos \theta - \mu R h s n \cos \theta = \mu h R \sin \theta.$$

On retrouve bien la première des équations du n° 24.

Passons à l'équation (ν). Pour calculer son second terme, j'ai, comme au n° 73,

$$M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \nu'} \right)' = - [M' K O'], \right.$$

et par suite, comme au n° 73,

$$\begin{aligned} - \sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \nu'} \right)' \right. &= + [\mu h k' . K . I R s] \\ &= \mu R h s [k' K I] = - \mu R h p s \cos \theta. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à ajouter cette quantité à la deuxième des expressions (1) pour avoir le premier membre de l'équation (v), savoir

$$(v) \quad (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) n' + \mu R h s' \sin \theta + 2 (B - C) p n \sin \theta \cos \theta = 0.$$

Calculons enfin le second terme de l'équation (σ). On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \sigma} &= IR, \\ \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)' &= JR n, \\ - \sum m M' \left|\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)'\right. &= - \mu h k' JR n = + \mu R h p n \cos \theta \quad [\text{éq. (5), n}^\circ 5]. \end{aligned}$$

En ajoutant cette quantité à la troisième des expressions (1), j'obtiens le premier membre de l'équation

$$(\sigma) \quad \mu R^2 s' + \mu R h n' \sin \theta + 2 \mu R h p n \cos \theta = 0.$$

Les équations (v) et (σ) sont bien conformes aux résultats trouvés au n° 25, formules (2), avec l'hypothèse $L = 0$.

La conformité des résultats obtenus par les deux méthodes est une vérification des équations du monocycle et du cerceau; c'est aussi un contrôle des idées que nous avons exposées sur l'application de la méthode de Lagrange, dans les cas où les paramètres choisis ne sont pas de véritables coordonnées.

§ II. — MÉTHODE GÉNÉRALE POUR L'ÉTUDE DES PROBLÈMES DE STABILITÉ.

73. *Théorème sur la forme des équations du mouvement dans un système admettant des états de régime.* — Nous avons vu qu'un état de régime du cerceau est défini par un angle de chute θ et des vitesses de marche et de conversion s et n , le système de ces trois nombres satisfaisant à l'équation d'équilibre du cerceau (E) (n° 8). C'est une conséquence

de ce fait que les équations du mouvement [équations (2), n° 7] contiennent la seule coordonnée θ , les vitesses s et n , et les dérivées de ces quantités, tandis que les deux coordonnées σ et ν dont s et n sont les vitesses n'entrent pas dans les équations. Examinons la réciproque :

On est certain, avant de connaître les équations du problème, qu'un état de régime est défini par la coordonnée θ et les deux vitesses n et s . Que peut-on prévoir sur les équations du problème ?

Soient ces équations

$$f(t; \theta, \theta', \theta''; \nu, n, n'; \sigma, s, s') = 0; \quad f_1(\dots) = 0; \quad f_2(\dots) = 0,$$

Dire que (θ_0, n_0, s_0) est un état de régime, c'est dire que les équations sont satisfaites pour

$$\theta = \theta_0, \quad n = n_0, \quad s = s_0,$$

et, par suite,

$$0 = \theta' = \theta'' = n' = s',$$

puis

$$\sigma = s_0 t + \sigma_0, \quad \nu = n_0 t + \nu_0,$$

quels que soient le temps t , et aussi les coordonnées initiales σ_0 et ν_0 . Ainsi les trois équations

$$f(t; \theta_0, 0, 0; n_0 t + \nu_0, n_0, 0; s_0 t + \sigma_0, s_0, 0) = 0; \\ f_1(\dots) = 0; \quad f_2(\dots) = 0$$

doivent être satisfaites quelles que soient les quantités t , σ_0 et ν_0 . Cela revient à dire que ces lettres ne figurent plus dans les équations.

Plus généralement, on peut énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Si un système à liaisons a pour degré de liberté $n + p$ et si un état de régime est défini par n coordonnées X_1, X_2, \dots, X_n et les vitesses U_1, U_2, \dots, U_p des p coordonnées restantes, on peut affirmer que ces p coordonnées et le temps disparaissent des équations du*

problème quand on y remplace les X et les U par un système de valeurs définissant un état de régime.

Le cas le plus simple est celui où le temps et les p dernières coordonnées ne figurent pas dans les équations, même avant la substitution relative à un état de régime. Je me bornerai à ce cas, qui seul se présente dans l'étude des cycles. Voici une méthode qui permet d'étudier, dans ce cas encore très général, la stabilité d'un état de régime.

76. Méthode pour l'étude de la stabilité des états de régime. — Je simplifierai l'écriture et le langage, sans diminuer en rien la généralité des raisonnements, en limitant à deux le degré de liberté du système. Un état de régime sera défini par une coordonnée X et la vitesse U de l'autre coordonnée. Dans notre hypothèse, les équations du problème seront de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} f(X, X', X''; U, U') = 0, \\ g(X, X', X''; U, U') = 0. \end{cases}$$

Elles sont satisfaites par les valeurs, relatives à un état de régime,

$$X = X_0, \quad U = U_0,$$

et, par suite,

$$0 = X' = X'' = U';$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(2) \quad \begin{cases} f(X_0, 0, 0; U_0, 0) = 0, \\ g(X_0, 0, 0; U_0, 0) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de savoir si l'état (X_0, U_0) est stable. Pour cela, je suppose qu'on dérègle infiniment peu l'état de régime. Dans les premiers instants, les variables X et U prendront des valeurs infiniment voisines des valeurs initiales, savoir

$$X = X_0 + x, \quad U = U_0 + u; \quad X' = x', \quad X'' = x'', \quad U' = u'.$$

Si l'on porte ces expressions des variables dans les équations (2), on obtient

$$(3) \quad \begin{cases} f(X_0 + x, x', x''; U_0 + u, u') = 0, \\ g(X_0 + x, x', x''; U_0 + u, u') = 0. \end{cases}$$

Dire que l'état (X_0, U_0) est stable, c'est dire que les accroissements x, x', x'', u, u' demeurent infiniment petits pour toute valeur du temps t . Dans ces conditions, on peut développer les équations (3) suivant la formule de Taylor et limiter le développement aux termes du premier ordre. D'ailleurs le premier terme de chaque développement est nul en vertu des équations de l'équilibre de régime (2). Les équations (3) se réduisent alors à des équations linéaires à coefficients constants

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial X''}\right)_0 x'' + \left(\frac{\partial f}{\partial X'}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial U'}\right)_0 u' + \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_0 u &= 0, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial X''}\right)_0 x'' + \left(\frac{\partial g}{\partial X'}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial g}{\partial X}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g}{\partial U'}\right)_0 u' + \left(\frac{\partial g}{\partial U}\right)_0 u &= 0. \end{aligned}$$

On sait les intégrer. Une quelconque des inconnues est une somme d'exponentielles de la forme $\alpha e^{\lambda t}$. Les coefficients λ du temps t sont déterminés par l'équation caractéristique (1)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X''} \lambda^2 + \frac{\partial f}{\partial X'} \lambda + \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial U'} \lambda + \frac{\partial f}{\partial U} \\ \frac{\partial g}{\partial X''} \lambda^2 + \frac{\partial g}{\partial X'} \lambda + \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial U'} \lambda + \frac{\partial g}{\partial U} \end{vmatrix} = 0,$$

où j'ai supprimé les indices zéro pour simplifier l'écriture. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles ou imaginaires de la forme $a + bi$, et l'on a

$$\alpha e^{\lambda t} = \alpha e^{at} e^{bit}.$$

Le module de ce terme varie comme e^{at} . Or, par l'hypothèse que l'état

(1) Cette équation pourrait être nommée *équation caractéristique de stabilité*.

de régime est stable, la perturbation doit demeurer infiniment petite. Donc a ne peut être que négatif ou nul.

Ainsi, pour que l'équilibre soit stable, il faut que les parties réelles des racines de l'équation caractéristique soient négatives ou nulles.

Cette condition est aussi suffisante, car, dans les premiers éléments du temps, il est légitime de limiter au premier ordre le développement de Taylor; mais $X, X', X''; U, U'$ demeurent infiniment petits d'après la nature des solutions approchées; il en résulte que la limitation du développement continue à être applicable.

Je me bornerai à ces indications, sans discuter les différentes questions que soulève la méthode, notamment l'influence des racines multiples de l'équation caractéristique sur la stabilité et celle de la détermination des constantes d'intégration par le dérèglement initial. Ces discussions sortiraient du cadre de notre travail déjà très étendu.

77. Application de la méthode au cerceau. — Si l'on se rappelle que p désignait la vitesse de chute θ' , on peut écrire les équations du cerceau [équations (2), n° 7] sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \theta'' + f(n, s, \theta) = 0, \\ n' + \theta' \varphi(n, s, \theta) = 0, \\ s' + \theta' \psi(n, s, \theta) = 0. \end{cases}$$

Si l'on applique à ces équations la méthode du n° 76, on sera conduit, pour intégrer le système d'équations linéaires, à l'équation caractéristique

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial n} & \frac{\partial f}{\partial s} \\ \lambda \varphi & \lambda & 0 \\ \lambda \psi & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

ou, en supprimant le facteur λ^2 et développant,

$$0 = \lambda^2 + \frac{\partial f}{\partial \theta} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} - \psi \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Pour qu'aucune des deux racines de cette équation en λ n'ait de partie réelle positive, il faut et il suffit qu'elles soient imaginaires, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} - \psi \frac{\partial f}{\partial s} > 0.$$

Or, d'après les équations (1), f est l'expression de $-\theta''$ ou $-p'$; $-\varphi$ et $-\psi$ sont les expressions de $\frac{n'}{\theta'}$ et $\frac{s'}{\theta'}$, ou $\frac{n'}{p}$ et $\frac{s'}{p}$. On retrouve bien ainsi la condition de stabilité du n° 9

$$0 < -\frac{\partial p'}{\partial \theta} - \frac{n'}{p} \frac{\partial p'}{\partial n} - \frac{s'}{p} \frac{\partial p'}{\partial s} = -\frac{1}{p} p''.$$

78. Application au monocycle. — Si, comme on l'a fait au n° 55, on néglige le coefficient d'inertie L , on obtient exactement le même calcul et le même résultat que pour le cerceau; mais, tandis que la méthode du n° 54 ne s'appliquait que grâce à l'hypothèse $L = 0$, la nouvelle méthode s'applique à tous les cas. Pour donner un peu plus d'intérêt à l'application que je vais faire, j'en profiterai pour examiner un cas qui n'a pas été traité au paragraphe de la stabilité du monocycle: c'est celui où la vitesse de marche s est maintenue constante par l'action du pédalier. Dans cette hypothèse, les équations du mouvement (p), (n), (s) du n° 24 se réduisent à deux et sont de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} A\theta'' - Ln' \cos \theta + P(n, s, \theta) = 0, \\ -L\theta'' \cos \theta + (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)n' + N(\theta', n, s, \theta) = 0, \end{cases}$$

avec $N = \theta' [2(B - C)n \sin \theta \cos \theta + L\theta' \sin \theta + (B_1 - \mu, R^2)s \cos \theta]$.

Si l'on imagine qu'on applique la méthode du n° 76, on sera conduit à un système de deux équations linéaires dont l'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + Ln' \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} & -L\lambda \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial n} \\ -L\lambda^2 + \frac{\partial N}{\partial \theta} \lambda + \frac{\partial N}{\partial \theta'} & (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)\lambda + \frac{\partial N}{\partial n} \end{vmatrix} = 0.$$

Or N contient θ' en facteur, et θ' est nul à l'état de régime; donc $\frac{\partial N}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial N}{\partial n}$ sont nuls. Dès lors, l'équation en λ contient λ en facteur. Ce facteur supprimé, je développe le déterminant et j'obtiens l'équation

$$(1)' \quad \begin{cases} [A(C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) - L^2 \cos^2 \theta] \lambda^2 + L \cos \theta \left(\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial N}{\partial \theta'} \right) \lambda \\ + (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \left(L n' \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\partial N}{\partial \theta'} = 0. \end{cases}$$

Le produit des deux racines de l'équation en λ doit d'abord être positif, sans quoi une des racines serait positive et cela entraînerait l'instabilité. J'écris cette condition en remarquant que le coefficient de λ^2 est positif à cause de la petitesse de L devant A et C

$$(2) \quad (C \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta) \left(L n' \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\partial N}{\partial \theta'} > 0.$$

Il faut, en outre, que la somme des racines soit négative ou nulle

$$(3) \quad L \left(\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial N}{\partial \theta'} \right) \geq 0.$$

Ces conditions remplies, deux cas seulement peuvent se présenter : Si les racines sont réelles, elles sont toutes deux négatives; si elles sont imaginaires conjuguées, leur partie réelle est encore négative. Dans les deux cas, la stabilité est assurée.

Sans discuter complètement les conditions (2) et (3), j'examinerai le cas de la marche rectiligne, qui est le plus important. On a alors

$$\theta = 0, \quad n = 0,$$

et, en se reportant aux équations (p) et (n) du n° 24,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= -\mu g h, & \frac{\partial P}{\partial n} &= -\mu R h s, \\ \frac{\partial N}{\partial p} &= B_1 - \mu_1 R^2 = +\mu R^2 s & & \text{(n° 4).} \end{aligned}$$

Les conditions (2) et (3) deviennent ainsi

$$\begin{array}{l} (2) \quad -C\mu gh + \mu\mu_1 R^3 h s^2 > 0 \\ (3) \quad LR s(\mu_1 R - \mu h) \geq 0 \end{array} \quad \left| \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{R}{g} s^2 > \frac{C}{\mu_1 R^2}, \quad L \leq 0 \\ (\text{car } \mu_1 R - \mu h < 0). \end{array} \right. \right.$$

La première condition est identique à la condition (S) du n° 36, si l'on tient compte du changement de variable qui revient à remplacer $\frac{R}{g}s^2$ par s^2 . Quant à la deuxième condition, elle est nouvelle et importante; elle montre que la stabilité dépend de la position du cavalier sur son cycle. Si le coefficient d'inertie

$$L = \Sigma m \zeta \zeta \quad (\text{n}^\circ \text{ 21})$$

devient positif, le cycle est instable. Toutefois, comme ce coefficient reste toujours petit, l'instabilité est faible. De plus, pour de grandes valeurs de s l'équation (1)' en λ a ses racines imaginaires; donc la perturbation est oscillante. Quand L est positif, l'amplitude, au lieu de s'amortir, augmente, mais lentement, et le cavalier pourra mettre à profit la première oscillation pour rétablir son équilibre par un petit déplacement du corps.

Il est à remarquer que l'instabilité, quand elle existe, diminue avec le facteur $\mu_1 R - \mu h$, circonstance favorable au grand monocycle que j'ai indiqué au n° 42.

CHAPITRE IV.

DYNAMIQUE DE LA BICYCLETTE.

§ I. — ÉQUILIBRE AVEC LES MAINS.

79. *Les trois équations du mouvement; quatre problèmes.* — On a vu, dans la partie cinématique (n° 39), que le degré de liberté du système

est trois et nous avons choisi pour les trois variables indépendantes les trois paramètres :

σ , angle de roulement de la roue motrice sur le sol ;
 γ , angle de position du guidon ;
 θ , angle de chute du cadre.

Le travail total $\delta\mathfrak{E}$ des forces appliquées et des forces d'inertie pour le déplacement virtuel $(\delta\sigma, \delta\gamma, \delta\theta)$ sera de la forme

$$\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\sigma}\delta\sigma + \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\gamma}\delta\gamma + \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\theta}\delta\theta.$$

Les trois équations du mouvement s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients de $\delta\sigma$, $\delta\gamma$ et $\delta\theta$.

$$\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\sigma} = 0, \quad \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\gamma} = 0, \quad \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\theta} = 0.$$

Je les appellerai *équations de marche, de guidon et de chute*. Je ne reviendrai pas sur l'étude de l'équation de marche, qui a fait l'objet de développements suffisants à propos du monocycle (Chap. II, § II). Au contraire, les équations de chute et de guidon présentent un intérêt particulier, comme on va voir ; il convient d'en faire l'étude.

Au sujet de la résolution du système des trois équations du mouvement, le problème peut être posé de quatre façons :

Premier problème. — Si l'on imagine que le cavalier ait lâché les pédales et le guidon, les trois équations devront être traitées entièrement, comme on a traité les trois équations du cerceau. La complication du problème ainsi posé est grande, et l'intérêt pratique de la solution paraît douteux, car on ne voit guère les cyclistes se livrer à cet exercice dangereux ; d'ailleurs, il rentre dans le quatrième des problèmes quand la vitesse de marche s change assez peu pour qu'on puisse la regarder comme constante.

Deuxième problème. — Normalement, le cycliste agit sur le pédalier et sur le guidon. L'action sur les pédales entre seulement dans l'équation de marche; l'action sur le guidon entre dans l'équation de guidon seule. Comme le cavalier est maître de régler son effort, il convient de regarder les équations de marche et de guidon comme définissant les efforts que doit faire le cavalier pour obtenir un effet donné. L'équation de chute reste alors seule pour déterminer l'équilibre ou la loi de chute de la bicyclette.

Troisième problème. — Le cavalier peut lâcher le pédalier seul, dans les cas où il n'en résulte qu'une variation lente de sa vitesse : en descente douce ou sur un sol horizontal, avec un vent favorable. Au point de vue de l'équilibre, ce problème a peu d'intérêt, parce qu'on obtiendra une approximation suffisante en négligeant les variations de la vitesse de marche, et qu'on rentre alors dans le cas précédent.

Quatrième problème. — Le cavalier lâche seulement les mains : C'est un cas important au point de vue pratique, parce qu'il intéresse la commodité du cavalier, qui a besoin de ses mains pour divers usages : saluer, consulter une montre, une carte, etc. Les deux équations qui intéressent l'équilibre sont alors celles de guidon et de chute, l'équation de marche définissant l'effort que doit faire le cavalier pour changer ou même entretenir sa vitesse de marche.

Je réserverai ce quatrième problème, pour étudier seulement le deuxième dans ce paragraphe; c'est le plus simple, puisqu'il se réduit à l'étude de l'équation de chute.

80. *L'équation de chute de la bicyclette.* — Soient T la force vive de la bicyclette, M l'un quelconque de ses points, m sa masse et z sa cote, l'équation du mouvement relative à $\partial\theta$ est l'équation de Lagrange modifiée (n° 72)

$$(\partial\theta) \quad \left(\frac{dT}{d\theta'}\right)' - \sum m M' \left|\left(\frac{dM}{d\theta'}\right)'\right| = - \sum m g \frac{dz}{d\theta'}$$

On a, dans ce qui précède, tous les éléments pour faire le calcul complet; mais les écritures sont tellement longues qu'elles risqueraient d'obscurcir la question en détournant l'attention par une surcharge trop grande. Je préfère expliquer d'abord sur la forme de l'équation quelques remarques qui me permettront de faire les calculs à mesure des besoins seulement.

Dans ce paragraphe, je cherche seulement la condition d'équilibre des divers régimes qu'on peut imaginer pour la bicyclette. Or un état de régime sera défini par des valeurs γ et θ attribuées à l'angle de guidon et à l'angle de chute, et une vitesse de marche s , les dérivées de ces quantités étant nulles.

$$(1) \quad 0 = \gamma' = \gamma'', \quad 0 = \theta' (\text{ou } p) = p', \quad 0 = s'.$$

La condition pour qu'un régime ainsi défini soit un régime d'équilibre, c'est qu'il satisfasse à l'équation de chute ($\delta\theta$). J'ai donc à calculer pour le moment, non pas l'équation ($\delta\theta$) complète, mais seulement ceux de ses termes qui ne contiennent aucun des facteurs $\gamma', \gamma'', p, p', s'$.

Pour ce calcul, on peut laisser de côté le premier terme $\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)'$ de l'équation ($\delta\theta$). En effet, T est une fonction quadratique des vitesses qui demeure identique à elle-même aux divers instants d'un même état de régime; $\frac{dT}{d\theta'}$ ne varie donc pas et sa vitesse de variation $\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)'$ est nulle. L'équation ($\delta\theta$) se réduit ainsi à ses deux derniers termes. Le dernier représente l'action de la pesanteur; le précédent, l'action de l'inertie: c'est lui surtout qui doit nous occuper maintenant. Il ne renferme aucune accélération et se réduit à une fonction quadratique des vitesses; il représente donc des forces de la nature des forces centrifuges. J'ajoute que chacun des termes de l'équation ($\delta\theta$) doit être décomposé en trois parties, provenant de la roue motrice, de la roue directrice et du cadre, et conduisant à des calculs différents.

31. *Calcul du terme $\sum m\mathbf{M}' \left| \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\theta}\right)' \right.$ pour la roue motrice.* — Je

commence par calculer $\frac{dM}{d\theta}$. C'est la vitesse virtuelle du point M, due à la rotation $\frac{d\theta}{dt} = 1$. Or le déplacement indépendant $\delta\theta$ entraîne celui des trois fonctions $\delta\eta$, $\delta\nu$, $\delta\sigma$, (nos 60 et 66). Le second de ces trois déplacements $\delta\nu$ est le seul qui affecte la roue motrice (le premier affecte le cadre et le troisième la roue directrice). La vitesse virtuelle de la roue est donc due à une rotation instantanée qui est issue du point O et qui a deux composantes, savoir

$$\Theta = I + K \frac{d\nu}{d\theta}.$$

La vitesse virtuelle du point M est alors

$$\frac{dM}{d\theta} = |\Theta(M - O),$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dM}{d\theta}\right)' = |\Theta M' - |\Theta O' + |\Theta'(M - O)$$

et

$$(1) \quad M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta}\right)' = [\Theta M' M'] - [\Theta O' M'] + [\Theta'(M - O) M'] \quad (1).$$

Le premier terme, le parallépipède $[\Theta M' M']$, est nul comme ayant deux arêtes confondues M' . Le binome formé par le deuxième et le troisième terme doit être multiplié par la masse m et sommé relativement à tous les points de la roue. Le deuxième est linéaire par rapport au point M; la sommation introduira le centre S de la roue par la formule

$$\sum m M' = \mu S'.$$

(1) $\left(\frac{dM}{d\theta}\right)'$ est composé de termes de la forme $|AB$. Un tel terme est un vecteur normal au plan des deux vecteurs A, B et mesuré par l'aire du parallélogramme construit sur A et B; $M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta}\right)'$ est le produit du vecteur $\left(\frac{dM}{d\theta}\right)'$ par la projection de M' sur lui. C'est donc la somme algébrique des parallépipèdes tels que $[ABM']$. Le premier parallépipède est nul comme renfermant deux fois le vecteur M' .

Or la vitesse S' du centre $S = O + Rk$ est

$$S' = O' + Rk' = O' + R(-pj + In \sin \theta) \quad (\text{n}^\circ 5).$$

Le deuxième terme de la formule (1) donne donc

$$- \sum m [\theta O' M'] = - \mu [\theta O' R(-pj + In \sin \theta)]$$

et, en remplaçant O' par sa valeur IRs et θ par $I + K \frac{dy}{d\theta}$,

$$(2) \quad - \sum m [\theta O' M'] = + \mu \frac{dy}{d\theta} R^2 ps [KIj] = \mu R^2 ps \frac{dy}{d\theta} \cos \theta.$$

Le troisième terme de la formule (1) contient le point M au second ordre et introduit le vecteur $\sum m [(M - O)M']$; c'est le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point O . Ce moment a pour expression, comme on sait,

$$ApI + Bqj + Crk = ApI + B(s + n \sin \theta)j + Cn \cos \theta k \quad (\text{n}^\circ 2).$$

Il doit être multiplié par la projection sur lui du vecteur

$$\theta' = I' + K \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' = j \left[n \cos \theta + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' \sin \theta \right] + k \left[-n \sin \theta + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' \cos \theta \right].$$

Le troisième terme cherché a donc finalement pour valeur

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum m [\theta' (M - O)M'] &= B(s + n \sin \theta) \left[n \cos \theta + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' \sin \theta \right] \\ &+ Cn \cos \theta \left[-n \sin \theta + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' \cos \theta \right]. \end{aligned} \right.$$

L'équation (1) s'obtient en réunissant les résultats partiels (2) et (3). Pour l'écrire sous sa forme définitive, je rétablis l'indice 1 négligé jusqu'ici et que j'ai adopté plus haut (n° 21) pour distinguer les constantes de la roue

de celles du cadre monté. J'obtiens ainsi

$$\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' = B_1 s n \cos \theta + (B_1 - C_1) n^2 \sin \theta \cos \theta \right. \\ \left. + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' [B_1 s \sin \theta + (C_1 \cos^2 \theta + B_1 \sin^2 \theta) n] + \mu_1 R^2 \rho s \frac{dy}{d\theta} \cos \theta. \right.$$

Dans cette formule, la partie soulignée d'un trait s'annule à l'état de régime, parce que les vitesses $\left(\frac{dy}{d\theta} \right)'$ et p sont alors nulles.

82. *Calcul du terme $\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right.$ pour la roue directrice.* —

Comme la roue motrice, la roue directrice est assujettie à rouler sur le sol. Le mouvement résultant, qu'il soit réel ou virtuel, se réduit à une rotation instantanée autour du point de contact O_1 avec le sol. Le calcul du n° 81 s'applique; cependant la rotation virtuelle est ici plus complexe, car elle résulte non seulement des déplacements $\delta\theta$ et δy , mais aussi de δr_1 et $\delta\sigma_1$. Je désigne par θ_1 la nouvelle rotation virtuelle

$$(1) \quad \theta_1 = I - j \frac{dr_1}{d\theta} + K \frac{dy}{d\theta} + j_1 \frac{d\sigma_1}{d\theta},$$

et je déduis de cette formule

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1' = J n + (-pk + I n \cos \theta) \frac{dr_1}{d\theta} + (-p_1 k_1 + I_1 n_1 \cos \theta_1) \frac{d\sigma_1}{d\theta} \\ \quad \underline{-j \left(\frac{dr_1}{d\theta} \right)' + K \left(\frac{dy}{d\theta} \right)' + j_1 \left(\frac{d\sigma_1}{d\theta} \right)'} \quad (\text{n° 5}). \end{array} \right.$$

Les termes soulignés sont nuls à l'état de régime. Outre la vitesse virtuelle θ_1 , nous avons à considérer les vitesses réelles de la roue directrice; elles seront représentées par les formules de la roue motrice affectées d'indices (n°s 2 et 6) :

$$O_1' = I_1 R s_1 \quad \Omega_1 = I_1 p_1 + j_1 s_1 + K n_1, \quad (n_1 = n, p_1 = 0 \text{ en régime}).$$

Avec ces différences, le calcul du n° 81 donne

$$(2) \quad - \sum m [\theta_i O_i M'] = \underline{p_i R p_i s_i} [\theta_i I_i j_i],$$

$$(3) \quad + \sum m [\theta'_i (M - O_i) M'] = \theta'_i |(A_i p_i I_i + B_i q_i j_i + C_i r_i k_i).$$

A l'état de régime, les termes soulignés sont nuls et il reste

$$(4) \quad \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right. = \theta'_i |(B_i q_i j_i + C_i r_i k_i).$$

Or, à cet état, θ'_i n'a pas de composante verticale (formule 1') et l'on peut remplacer la parenthèse par sa composante suivant J_i , savoir

$$J_i (B_i q_i \cos \theta_i - C_i r_i \sin \theta_i) = J_i [B_i s_i \cos \theta_i + (B_i - C_i) n \sin \theta_i \cos \theta_i].$$

θ'_i peut alors être réduit aux termes $J_n + I_n \cos \theta \frac{d\eta}{d\theta}$, car le cosinus $I_i | J_i$ est nul. On a donc en définitive, pour la roue directrice,

$$\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right. = \left(\cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta \frac{d\eta}{d\theta} \right) \\ \times [B_i s_i n \cos \theta_i + (B_i - C_i) n^2 \sin \theta_i \cos \theta_i]$$

à l'état de régime.

On reconnaît une parenté étroite entre cette expression et celle de la roue motrice (n° 81).

85. Calcul du terme $\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right.$ pour le cadre monté. — Le cadre est affecté par les trois rotations I , $-j \frac{d\eta}{d\theta}$, $K \frac{d\nu}{d\theta}$. La vitesse virtuelle du point M est donc

$$\frac{dM}{d\theta} = |I(M - O) - \frac{d\eta}{d\theta} |j(M - S) + \frac{d\nu}{d\theta} |K(M - O),$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dM}{d\theta} \right)' = |IM' - \frac{d\eta}{d\theta} |jM' + \frac{d\nu}{d\theta} |KM' \\ - |IO' + \frac{d\eta}{d\theta} |jS' - \frac{d\nu}{d\theta} |KO' + |I'(M - O) - \frac{d\eta}{d\theta} |j'(M - S) \\ - \left(\frac{d\eta}{d\theta} \right)' |j(M - S) + \left(\frac{d\nu}{d\theta} \right)' |K(M - O).$$

Quand on passe à $M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right.$, la première ligne donne trois parallélogrammes nuls comme renfermant deux fois l'arête M' ; le terme suivant est nul aussi, et il reste six termes :

$$M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right. = \frac{dr_1}{d\theta} [jS'M'] - \frac{dv}{d\theta} [KO'M'] + [I'(M-O)M'] - \frac{dr_1}{d\theta} [j'(M-S)M'] \\ - \left(\frac{dr_1}{d\theta} \right)' [j(M-S)M'] + \left(\frac{dv}{d\theta} \right)' [K(M-O)M'].$$

On doit multiplier cette expression par la masse m du point M et faire la somme \sum relative à tous les points du cadre et du cavalier. Pour les deux premiers termes, le point M entre linéairement; la somme \sum introduit la quantité de mouvement μV du centre de gravité. Les autres termes introduisent le moment résultant des quantités de mouvement, soit par rapport au point O (3 et 6), soit par rapport au point S (4 et 5). Les calculs se continuent d'une façon analogue à celle du n° 31. Pour éviter des longueurs, je rapporte seulement les résultats :

$$\begin{aligned} (1) \quad & + \frac{dr_1}{d\theta} \sum m [jS'M'] = + \mu R \frac{dr_1}{d\theta} (en \sin \theta - \underline{er_1'}) (s + n \sin \theta), \\ (2) \quad & - \frac{dv}{d\theta} \sum m [KO'M'] = + \mu R s \frac{dv}{d\theta} (-en + \underline{hp \cos \theta} + \underline{er_1' \sin \theta}), \\ (3) \quad & \left\{ + \sum m [I'(M-O)M'] = + \mu R h (s + \underline{r_1'}) n \cos \theta \right. \\ & \quad \left. + B n \cos \theta (n \sin \theta - \underline{r_1'}) - n \sin \theta (\underline{Lp} + C n \cos \theta), \right. \\ (4) \quad & \left\{ - \frac{dr_1}{d\theta} \sum m [j'(M-S)M'] = + \frac{dr_1}{d\theta} \right. \\ & \quad \left. \times [-\underline{Lp^2} + (\underline{A-C} - \mu R h) n p \cos \theta + n^2 \cos \theta (\underline{L \cos \theta} - \mu R \sin \theta)], \right. \\ (5) \quad & \left\{ - \left(\frac{dr_1}{d\theta} \right)' \sum m [j(M-S)M'] = - \left(\frac{dr_1}{d\theta} \right)' \right. \\ & \quad \left. \times [(B - \mu R h) n \sin \theta + \mu R (h - R) s + \mu R (2h - R) r_1'], \right. \\ (6) \quad & \left\{ + \left(\frac{dv}{d\theta} \right)' \sum m [K(M-O)M'] = + \left(\frac{dv}{d\theta} \right)' \right. \\ & \quad \left. \times \{ [\mu R h (s + r_1') + B (n \sin \theta - r_1')] \sin \theta + (\underline{Lp} + C n \cos \theta) \cos \theta \}. \right. \end{aligned}$$

Dans ces formules, e, h désignent les coordonnées du centre de gravité du cadre monté par rapport aux axes Oi et Ok ; L est le coefficient d'inertie $\sum mzx$ rapporté aux mêmes axes (*cf.* n° 21). La somme des six expressions représente la valeur de $\sum mM' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right|$ pour le cadre monté. Les termes soulignés sont ceux qui s'annulent à l'état de régime.

84. *Calcul des termes venant de la gravité.* — Si z est la cote d'un point de masse m , le travail de la pesanteur pour le déplacement $+\delta z$ est $-mg\delta z$. Le travail total correspondant à la vitesse virtuelle $\frac{\delta\theta}{\delta t} = 1$ est

$$-g \sum m \frac{dz}{d\theta} = -g \sum m K \left| \frac{dM}{d\theta} \right|.$$

La somme \sum se compose de trois parties qui correspondent respectivement aux deux roues et au cadre et qui peuvent être remplacées par les termes correspondants calculés pour les centres de gravité. Je désignerai ici ces centres respectivement par S, S_1 et C . On a, pour les trois parties

Roue motrice...	+	$\sum m K \left \frac{dM}{d\theta} \right $	=	$+g\mu_1 [K\Theta(S-O)]$	(n° 81),
Roue directrice.				$+g\mu_1 [K\Theta_1(S_1-O_1)]$	(n° 82),
Cadre monté...				$+g\mu \left\{ KI(C-O) - \frac{d\eta}{d\theta} [Kj(C-S)] \right\}$	(n° 83).

Pour développer le terme de la roue motrice, on a (n° 81)

$$\begin{aligned} \theta &= I + K \frac{dv}{d\theta}, & S-O &= kR = -JR \sin\theta + K(\dots), \\ (1) \quad & & [K\Theta(S-O)] &= -R \sin\theta. \end{aligned}$$

Pour la roue directrice (n° 82),

$$\begin{aligned} \theta_1 &= I - j \frac{dr_1}{d\theta} + K \frac{dv}{d\theta} + j_1 \frac{d\sigma_1}{d\theta} = I - J \cos\theta \frac{d\eta}{d\theta} + J_1(\dots) + K(\dots), \\ S_1-O_1 &= -J_1 R \sin\theta_1 + K(\dots), \end{aligned}$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} [K\theta_1(S_1 - O_1)] &= +R \sin\theta_1 \left[-(KIJ_1) + (KJJ_1) \cos\theta \frac{dr_1}{d\theta} \right] \\ &= -R \sin\theta_1 \left(\cos\alpha - \sin\alpha \cos\theta \frac{dr_1}{d\theta} \right); \end{aligned} \right.$$

enfin, pour le cadre monté,

$$(3) \quad \begin{aligned} C - O &= Ie + kh = Ie - Jh \sin\theta + K(\dots), \\ C - S &= Ie - J(h - R) \sin\theta + K(\dots), \\ KI(C - O) &= -h \sin\theta, \\ -\frac{dr_1}{d\theta} [Kj(C - S)] &= +e \cos\theta \frac{dr_1}{d\theta}. \end{aligned}$$

J'aurai le terme de la gravité correspondant à la bicyclette totale en ajoutant les expressions (1), (2), (3) multipliées respectivement par μ_1 , μ_2 et μ :

$$+g \sum mK \left| \frac{dM}{d\theta} \right| = +g \left[\underbrace{-\mu_1 R \sin\theta}_{\text{Roue motrice.}} - \underbrace{\mu_2 R \sin\theta_1 \left(\cos\alpha - \sin\alpha \cos\theta \frac{dr_1}{d\theta} \right)}_{\text{Roue directrice.}} - \underbrace{\mu h \sin\theta + \mu e \cos\theta \frac{dr_1}{d\theta}}_{\text{Cadre monté.}} \right]$$

85. *Équation d'équilibre de la bicyclette avec les mains.* — Nous avons vu que l'équation de chute de la bicyclette est

$$(\partial\theta) \quad \left(\frac{dT}{d\theta} \right)' - \sum mM' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right| = - \sum mgK \left| \frac{dM}{d\theta} \right| \quad (\text{n}^\circ \text{ 80})$$

et que le terme $\left(\frac{dT}{d\theta} \right)'$ est nul à l'état de régime; enfin nous avons calculé

les deux autres termes de l'équation pour les trois parties de la bicyclette.

Pour avoir l'équation d'équilibre, il faut reporter les résultats obtenus aux n^{os} 81 à 84.

C'est ce qui est fait dans le Tableau que voici :

	$\text{Terme} + \sum m M' \left(\frac{dM}{d\theta} \right)'$ (forces centrifuges).	
Roue motrice.	$B_1 sn \cos \theta + (B_1 - C_1) n^2 \sin \theta \cos \theta$	(n ^o 81)
Roue directrice.	$[B_1 s_1 n \cos \theta_1 + (B_1 - C_1) n^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \left(\cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta \frac{dr_1}{d\theta} \right)$	(n ^o 82)
Cadre monté.	$\left. \begin{aligned} & \mu R h sn \cos \theta + (B - C) n^2 \sin \theta \cos \theta \\ & + \frac{dr_1}{d\theta} [\mu R e (sn \sin \theta + n^2 \sin^2 \theta - n^2 \sin \theta \cos \theta) + L n^2 \cos^2 \theta] \\ & - \frac{d\gamma}{d\theta} \mu R e sn \end{aligned} \right\}$	(n ^o 83)
	$\text{Terme} + \sum m g \frac{dz}{d\theta}$ (gravité).	
Roue motrice.	$+ g \left[-\mu_1 R \sin \theta \right.$	
Roue directrice.	$- \mu_1 R \sin \theta_1 \left(\cos \alpha - \sin \alpha \cos \theta \frac{dr_1}{d\theta} \right)$	(n ^o 84)
Cadre monté.	$- \mu h \sin \theta + \mu e \cos \theta \frac{dr_1}{d\theta} \left. \right]$	

Il suffit d'écrire le signe = entre ces deux groupes de termes pour avoir l'équation d'équilibre de la bicyclette avec les mains.

La façon dont j'ai groupé les termes, montrant leur origine, permet d'en comprendre la signification naturelle et d'effectuer des vérifications.

C'est ainsi, par exemple, qu'on retrouve l'équation d'équilibre du cerceau en négligeant les termes qui proviennent de la roue directrice et du cadre. En négligeant la roue directrice seulement, on obtient une équation qui reproduit celle du monocycle quand on fait

$$\frac{dr_1}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\gamma}{d\theta} = 0.$$

Je ne m'attarderai pas à expliquer la signification de chaque terme :

cela reviendrait à établir l'équation d'équilibre par la méthode géométrique du n° 44, sujet intéressant, mais qui allongerait encore ce Mémoire. La méthode géométrique, quoique plus simple que la méthode analytique suivie, serait plus susceptible de laisser échapper quelque erreur; de plus, elle deviendrait à peu près inapplicable pour obtenir les équations complètes du mouvement et, par suite, pour aborder le problème de la stabilité.

36. *Réduction de l'équation.* — Pour arriver à des conséquences pratiques, il convient de réduire l'équation complète à ses termes principaux, de façon à avoir une équation approchée plus simple. Le terme le plus important de l'inertie vient du cadre monté; c'est $\mu R h s n \cos \theta$ qui représente le moment de la force centrifuge du cadre monté par rapport à sa trace OI. Je dois y remplacer n par sa valeur

$$n = \frac{R \sin \alpha}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} s \quad [(2), \text{n}^\circ 66].$$

Or, dans les états de régime, les angles α , γ , θ restent toujours assez petits pour qu'on puisse en négliger le second ordre devant l'unité; on peut alors, d'après les résultats du n° 34, négliger $y \sin \alpha$ devant $x \cos \alpha$ et remplacer x par l ; on obtient ainsi

$$n = \frac{R}{l} s \operatorname{tang} \alpha,$$

et le terme considéré $\mu R h s n \cos \theta$ de l'équation d'équilibre s'écrit

$$\mu R h \frac{R}{l} s^2 \operatorname{tang} \alpha \cos \theta.$$

Il est du premier ordre par rapport à α . Je négligerai devant lui les termes qui sont du troisième ordre et qui ont un coefficient dynamique plus petit que $\mu R h s^2$. Je rappelle que, dans l'hypothèse où le cadre

est vertical ($\theta = 0$), on a

$$\frac{y}{l} = - \frac{R \sin \omega - c}{l} \sin \gamma \quad (1) \quad (\text{n}^\circ \text{ 34}).$$

Cette quantité est diminuée quand le cadre prend une inclinaison θ . On voit que y est du premier ordre et qu'il contient en outre un facteur numérique $\frac{R \sin \omega - c}{l}$ qui est inférieur à $\frac{R \sin \omega_0 - c}{l} = 0,07$ avec les constantes du n° 32. D'après cela, $\frac{dr_1}{d\theta}$ est du premier ordre et $\frac{dy}{d\theta}$ du second ordre [équations (1) du n° 66]. Les termes du n° 83 se réduisent alors à ceux-ci :

	Termes	Termes
	$\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right.$	$\sum m g \frac{dz}{d\theta}$
Roue motrice.....	$B_1 sn \cos \theta$	$- \mu_1 g R \sin \theta$
» directrice.....	$B_1 s_1 n \cos \theta_1 \cos \alpha$	$- \mu_1 g R \sin \theta_1 \cos \alpha$
Cadre monté.....	$\mu R h sn \cos \theta$	$\left(- \mu h \sin \theta + \mu e \cos \theta \frac{dr_1}{d\theta} \right) g$

La roue motrice et le cadre donnent des termes semblables qui se réduisent :

$$(\mu R h + B_1) sn \cos \theta,$$

puis

$$- (\mu h + \mu_1 R) g \sin \theta.$$

Comme dans le monocycle (n° 24), je désignerai ces quantités simplement par $\mu R h sn \cos \theta$ et $- \mu h g \sin \theta$, ce qui n'altère pas l'exactitude de l'équation, pourvu qu'on change légèrement les constantes spécifiques de la bicyclette. Les termes venant de la roue directrice sont d'une forme un peu différente, mais peu éloignée, et, comme ils sont faibles, on peut aussi, par approximation, les faire rentrer dans les termes relatifs au cadre.

Après toutes ces simplifications, l'équation d'équilibre de la bicyclette

(1) Comme je l'ai annoncé au n° 58 bis, je fais ici le changement de notation qui consiste à désigner par ω l'angle qui avait été désigné par μ au Chapitre I.

s'écrit

$$(1) \quad \mu R h s n \cos \theta + \mu g h \sin \theta - \mu g e \cos \theta \frac{dr_1}{d\theta} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(2) \quad n = \frac{R}{l} s \operatorname{tang} \alpha, \quad \frac{dr_1}{d\theta} = \frac{-y}{x \cos \theta} \quad (\text{équations du n}^\circ 66 \text{ simplifiées}).$$

Le dernier terme demeure gênant pour rendre compte de l'allure des faits. Je le négligerai, quitte à calculer ensuite (n° 37) son importance relativement au terme qui le précède. Nous verrons qu'il est, en effet, négligeable. L'équation d'équilibre se réduit, en définitive, à celle-ci :

$$(3) \quad \mu R h \frac{R}{l} s^2 \operatorname{tang} \alpha \cos \theta + \mu g h \sin \theta = 0.$$

C'est l'équation des moments par rapport à O_1 du poids du cadre monté et de sa force centrifuge. On aurait pu l'écrire de suite; mais cette méthode approximative de mise en équation aurait eu l'inconvénient de laisser dans l'ignorance des équations exactes du mouvement et de l'équilibre et du degré d'exactitude de l'équation approchée.

36 bis. Conséquences pratiques. — L'équation (3) peut être résolue par rapport à α ou à θ :

$$(3)' \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \theta = - \frac{R}{l} \frac{R s^2}{g} \operatorname{tang} \alpha, \\ \operatorname{tang} \alpha = - \frac{l}{R} \frac{g}{R s^2} \operatorname{tang} \theta. \end{cases}$$

Pour chaque valeur de la vitesse de marche s , cette formule fait connaître la relation (approchée) que l'équilibre impose entre les angles θ et α , c'est-à-dire, si l'on veut, entre les angles de chute et de guidon, car $\operatorname{tang} \alpha$ est une fonction de θ et γ connue par les formules du n° 37. La première formule (2) donne la valeur correspondante de n . On voit que α et n ont un signe contraire à celui de θ : si, par exemple, la bicyclette

penche à gauche, le cavalier doit ramener à lui la main gauche et la bicyclette converge alors à gauche. De la formule (3)' résultent quelques conséquences vérifiées par l'expérience.

Aux grandes vitesses de marche, le rapport $\frac{\tan \alpha}{\tan \theta}$ est petit. Les mots *grand* et *petit* seront d'ailleurs précisés par une application numérique au n° 88. Il faut de faibles mouvements du guidon pour compenser la variation de l'angle de chute θ . L'équation (3) montre qu'une erreur commise par le cavalier sur l'angle de guidon donne à la force centrifuge une prépondérance d'autant plus grande que la vitesse de marche est plus considérable.

Ainsi, aux grandes vitesses, le guidon doit être manœuvré avec précaution et par mouvements insensibles.

L'erreur des commençants est de la manier avec trop de vivacité; c'est la cause de leurs chutes. Une personne, même exercée, qui a l'habitude de conduire avec les deux mains ou avec la main droite, éprouve quelque difficulté à conduire avec la main gauche ou à conduire en tenant le milieu du guidon au lieu des extrémités. Et pourtant son équilibre sera bien assuré s'il abandonne le guidon des deux mains, pourvu que la vitesse soit suffisante (n° 121).

Par contre, les variations du moment de la pesanteur, étant compensées par de très faibles variations de l'angle α , la position du cavalier sur la selle n'a aucune importance pour le maintien de l'équilibre; cela explique pourquoi le cavalier peut facilement recevoir en croupe une personne inhabile à la bicyclette et aux exercices d'équilibre. Cette personne peut monter sur le marchepied et descendre, pendant la marche, sans provoquer la chute du cavalier.

Aux faibles vitesses, l'influence de la pesanteur s'accroît. Au repos, l'équilibre ne dépend plus du maniement du guidon, mais de la seule position du corps (n° 69).

87. Conversions. — A ce qu'on vient de dire se rattache l'étude des

conversions. La courbure en un point de la trajectoire est le quotient de l'angle de contingence par la longueur de l'arc, soit $\frac{n}{s}$, soit encore d'après les formules (2) et (3)'

$$\frac{n}{s} = \frac{R}{l} \operatorname{tang} \alpha = - \frac{g}{R s^2} \operatorname{tang} \theta.$$

La courbure de la conversion est donc inversement proportionnelle au carré de la vitesse de marche. De là des dangers divers :

1° Un cavalier peu exercé, qui commence à tenir l'équilibre en ligne droite, cherche à se donner de la stabilité (n° 121) en conservant une vitesse qui convient à la marche rectiligne. Veut-il faire demi-tour à gauche, il devrait, pour garder l'équilibre, se pencher fortement à gauche et n'incliner le guidon que lentement et faiblement, à mesure que son angle de chute augmente. Ignorant la faiblesse de l'action de la pesanteur qu'il redoute d'instinct, et ne se défiant pas du guidon qui, pour lui, représente la seule idée de direction, que fera-t-il ? Il osera bouger à peine son corps et déplacera franchement le guidon : brusquement, par une violente force centrifuge, il sera jeté à terre sur sa droite.

2° Un cavalier exercé, mais peu réfléchi, comme sont les enfants, saura garder son équilibre ; mais, pour tourner, il omettra de ralentir suffisamment l'allure. S'il est, par exemple, sur une route, il ne pourra pas donner à la conversion une courbure suffisante et sera lancé sur le bord de la route.

3° Un cavalier, même habile, sera facilement surpris, sur un terrain plus glissant que de coutume, par un dérapage brusque ; car l'angle θ est limité par l'angle de dérapage (nos 50 à 52).

38. Application numérique. — De la formule du n° 37 on tire

$$(1) \quad \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \theta} = \frac{-g l}{R^2 s^2}.$$

Les constantes adoptées au n° 52 sont

$$l = 1^m, 10, \quad R = 0^m, 38.$$

Une bonne vitesse de marche est 20^{km} à l'heure, soit

$$R_s = \frac{20\,000}{3\,600} = \frac{50}{9}.$$

Ces nombres portés dans la formule (1) donnent

$$\frac{\text{tang } z}{\text{tang } \theta} = 0,035.$$

On voit combien est faible l'influence de la pesanteur, et grande celle de la force centrifuge; on peut dire, d'une façon peu précise, mais bien caractéristique, que l'influence des mouvements du corps n'est que $\frac{1}{30}$ de celle du guidon. Pour une vitesse moitié moindre, 10^{km} à l'heure, l'influence de la pesanteur est quadruplée, $\frac{\text{tang } z}{\text{tang } \theta} = 0,14$. Elle est encore faible.

89. *Importance numérique du terme* — $\mu g e \cos \theta \frac{d\eta}{d\theta}$ *négligé au n° 86.*

— Ce terme a été négligé devant $\mu g h \sin \theta$. L'erreur relative commise est

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{-\mu g e \cos \theta \frac{d\eta}{d\theta}}{\mu g h \sin \theta} = \frac{e}{h} \frac{\gamma}{x} \frac{1}{\sin \theta} \quad [\text{éq. (2), n° 86}].$$

Je remplacerai x par l ; quant à la valeur de γ , je la tire des formules du n° 47, en prenant le coefficient de J dans l'expression de OM :

$$\begin{aligned} \gamma = & -R \sin \theta - a \sin \theta \sin \tau_1 + (b + R \cos \omega) \sin \theta \cos \tau_1 \\ & + (c - R \sin \omega) (\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \sin \tau_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\sin \theta} = & -R - a \sin \tau_1 + b \cos \tau_1 \\ & + R \cos \omega \cos \tau_1 - (c - R \sin \omega) \cos \gamma \sin \tau_1 + (c - R \sin \omega) \cos \theta \frac{\sin \gamma}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, entre les constantes spécifiques, les relations (n° 44)

$$a = -c + l \cos \tau_{1_0}, \quad b = l \sin \tau_{1_0},$$

d'où l'on tire

$$-a \sin \tau_1 + b \cos \tau_1 = +c \sin \tau_1 + l \sin(\tau_0 - \tau_1) = +c \sin \tau_1 - l \sin \tau_1,$$

et par suite

$$\frac{\mathcal{J}}{\sin \theta} = -R + c \sin \tau_1 - l \sin \tau_1 \\ + R \cos \omega \cos \tau_1 - (c - R \sin \omega) \cos \gamma \sin \tau_1 + (c - R \sin \omega) \cos \theta \frac{\sin \theta}{\sin \gamma}.$$

D'autre part, l'équation (1) du n° 36 permet de remplacer la quantité

$$-l \sin \tau_1 - R + R \cos \omega \cos \tau_1 + R \sin \omega \cos \gamma \sin \tau_1,$$

par la quantité égale

$$-2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \tau_1 + \text{tang} \theta \sin \gamma (c - R \sin \omega),$$

de sorte qu'on a encore

$$\frac{\mathcal{J}}{\sin \theta} = -2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \tau_1 + (c - R \sin \omega) \text{tang} \theta \sin \gamma + c \sin \tau_1 (1 - \cos \gamma) \\ + (c - R \sin \omega) \cos \theta \frac{\sin \gamma}{\sin \theta}.$$

Les termes de la première ligne sont négligeables devant celui de la deuxième ligne. Celui-ci est une petite fraction de $c - R \sin \omega$, surtout aux grandes vitesses (n° 38); enfin $c - R \sin \omega$ a une valeur numérique voisine de c . Ainsi, on aura une limite de l'erreur relative ε en remplaçant, dans la formule (1), le deuxième facteur $\frac{\mathcal{J}}{x \sin \theta}$ par $\frac{c}{l}$, savoir :

$$\varepsilon < \frac{e}{h} \frac{c}{l}.$$

Si l'on adopte les constantes (n° 32)

$$c = 0^m, 20, \quad c = 0^m, 08,$$

$$h = 1^m, 00, \quad l = 1^m, 10;$$

on trouve

$$\varepsilon < 0,20 \times 0,073 = 0,015.$$

On voit que l'approximation faite en négligeant le dernier terme de l'équation (1) du n° 86 était entièrement légitime.

§ II. — ÉQUILIBRE SANS LES MAINS.

90. *L'équation du guidon.* — L'angle de guidon γ n'est plus fixé par la volonté du cavalier, mais abandonné aux réactions de la bicyclette; les deux équations du problème sont l'équation de chute, étudiée au paragraphe précédent, et l'équation du guidon

$$\left(\frac{dT}{d\gamma'}\right)' - \sum m M' \left|\left(\frac{dM}{d\gamma}\right)'\right| = - \sum mg \frac{dz}{d\gamma'} \quad (\text{cf. n° 80}).$$

A l'état de régime, le seul que nous prétendions traiter dans ce paragraphe, le premier terme est nul; il reste à calculer les deux autres; je le ferai en suivant la même marche que pour l'équation de chute.

91. *Terme* $\sum m M' \left|\left(\frac{dM}{d\gamma}\right)'\right|$. — Le déplacement indépendant $\delta\gamma$ entraîne trois déplacements $\delta r_1, \delta v, \delta \sigma_1$, de sorte que la vitesse virtuelle $\frac{dM}{d\gamma}$ d'un point quelconque M de la bicyclette peut être considérée comme la résultante de quatre autres par la formule

$$\frac{dM}{d\gamma} = \frac{\partial M}{\partial \gamma} + \frac{\partial M}{\partial r_1} \frac{dr_1}{d\gamma} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{d\gamma} + \frac{\partial M}{\partial \sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\gamma}.$$

Les calculs du § I peuvent être utilisés ici, car la vitesse virtuelle $\frac{dM}{d\gamma}$ ne diffère essentiellement de la vitesse

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial M}{\partial r_1} \frac{dr_1}{d\theta} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{d\theta} + \frac{\partial M}{\partial \sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\theta},$$

que par la première composante, les autres composantes recevant seule-

ment d'autres coefficients, savoir :

$$\frac{dr_1}{d\gamma}, \frac{dv}{d\gamma}, \frac{d\tau_1}{d\gamma}, \text{ au lieu de } \frac{dr_1}{d\theta}, \frac{dv}{d\theta}, \frac{d\tau_1}{d\theta}.$$

Or le terme $\frac{\partial M}{\partial \gamma}$ est nul pour la roue motrice et le cadre monté. Donc, pour ces deux organes, on pourra utiliser les formules du n° 83 relatives à $\delta\theta$. On y conservera seulement les termes qui renferment des coefficients différentiels tels que $\frac{dr_1}{d\theta}$ et l'on remplacera $\frac{d}{d\theta}$ par $\frac{d}{d\gamma}$ dans ces coefficients différentiels.

Quant à la roue directrice, on opérera de même, sauf qu'il faudra ajouter de nouveaux termes venant de la composante $\frac{\partial M}{\partial \gamma}$ qui n'est pas nulle pour la roue directrice. Le terme provenant de cette composante est

$$\sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \gamma} \right)' \right|.$$

Je vais le calculer.

92. Terme $\sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \gamma} \right)' \right|$ de la roue directrice. — La vitesse virtuelle $\frac{\partial M}{\partial \gamma}$ a d'abord pour valeur (1)

$$\frac{\partial M}{\partial \gamma} = [G(M - O_1)]$$

déduite de celle du n° 81 en remplaçant θ par G . Je porte le même changement dans la formule (1) de ce numéro et je fais la somme relative à tous les points de la roue

$$\sum m M' \left| \left(\frac{\partial M}{\partial \gamma} \right)' \right| = - \sum m [G O_1' M'] + \sum m [G'(M - O_1) M'].$$

Pour le calcul du premier terme, on a

$$[G O_1' M'] = [G O_1' (M' - O_1')],$$

(1) L'axe de la rotation G ne passe pas en réalité par le point de contact O_1 de la roue avec le sol (*fig. 9 bis*); mais d'après la remarque qui commence le n° 82, toutes les rotations ont une résultante passant par O_1 . Comme les autres composantes ont été rapportées à ce point (n° 82), la composante G doit être rapportée au même point O_1 . Son bras de levier est alors $M - O_1$.

puis

$$O'_i = I_i R s_i,$$

$$\sum m(M' - O'_i) = \mu_i(S'_i - O'_i) = \mu_i R k'_i \left\{ \begin{array}{l} \\ = \mu_i R(-p_i j_i + I_i n_i \sin \theta_i) \end{array} \right. \quad (\text{n}^\circ 5)$$

et, par suite,

$$-\sum m[GO'_i M'] = \mu_i R^2 s_i p_i [GI_i j_i].$$

Ce terme est nul à l'état de régime.

Je passe au second terme; c'est le produit de G' par la projection sur ce vecteur du moment de la quantité de mouvement par rapport au point O_i , savoir :

$$\sum m[(M - O_i)M'] = A_i p_i I_i + B_i q_i j_i + C_i r_i k_i.$$

Comme au n° 82, le premier de ces trois termes est nul à l'état de régime; à cet état, G' n'a pas de composante verticale. On peut alors remplacer le moment par sa composante suivant J_i , savoir

$$J_i [B_i s_i \cos \theta_i + (B_i - C_i) n \sin \theta_i \cos \theta_i] \quad (\text{n}^\circ 2).$$

Il me faut maintenant calculer G' au moyen de la formule

$$G = -I \sin \tau + k \cos \tau = -I \sin \tau - J \sin \theta \cos \tau + K \cos \theta \cos \tau \quad (\text{n}^\circ 47).$$

Il vient

$$G' = -J n \sin \tau + I n \sin \theta \cos \tau + \frac{dG}{d\tau} \tau' + \frac{dG}{d\theta} \rho.$$

On a donc, en définitive, à l'état de régime,

$$\begin{aligned} \sum m M' \left(\frac{\partial M}{\partial \gamma} \right)' &= \sum m [G'(M - O_i) N'] \\ &= (-n \sin \tau \cos \alpha - n \sin \theta \cos \tau \sin \alpha) \\ &\quad \times [B_i s_i \cos \theta_i + (B_i - C_i) n \sin \theta_i \cos \theta_i], \end{aligned}$$

et cette expression doit être ajoutée à celles qui ont été indiquées au n° 91.

95. Termes de la gravité $\sum mg \frac{dz}{d\gamma}$. — On a

$$\sum mg \frac{dz}{d\gamma} = \sum mg \mathbf{K} \left| \frac{dM}{d\gamma} \right.$$

Les remarques faites au n° 91 sur la comparaison entre $\frac{dM}{d\gamma}$ et $\frac{dM}{d\theta}$ conduisent au même artifice pour déduire les termes de l'équation du guidon de ceux de l'équation de chute. J'aurai à reporter ici les termes du n° 85 qui contiennent $\frac{dr_1}{d\theta}$, en remplaçant $\frac{dr_1}{d\theta}$ par $\frac{dr_1}{d\gamma}$; puis il faudra ajouter le terme

$$\begin{aligned} \sum mg \mathbf{K} \left| \frac{\partial M}{\partial \gamma} \right. &= \mu_1 g \mathbf{K} \left| \frac{\partial S_1}{\partial \gamma} \right. = \mu_1 g [\mathbf{K} \mathbf{G} (S_1 - O_1)]^{(1)} \\ &= \mu_1 R g [\mathbf{K} \mathbf{G} k_1] = - \mu_1 R g \sin \omega \sin \varrho \quad (2). \end{aligned}$$

94. Résumé des résultats. Équation d'équilibre du guidon. — J'exécute en deux Tableaux le travail de copie des résultats indiqués aux n°s 91, 92 et 95.

Termes $\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right.$ (forces centrifuges).	
Roue motrice...	Néant. (n° 85)
Roue directrice.	$-\sin \alpha \cos \theta \frac{dr_1}{d\gamma} [B_1 s_1 n \cos \theta_1 + (B_1 - C_1) n^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1]$ (n° 85)
	$+ [-n \sin \eta \cos \alpha - n \sin \theta \cos \eta \sin \alpha]$
	$\times [B_1 s_1 \cos \theta_1 + (B_1 - C_1) n \sin \theta_1 \cos \theta_1]$ (n° 92)
Cadre monté....	$+\frac{dr_1}{d\gamma} [\mu R e (sn \sin \theta + n^2 \sin^2 \theta - n^2 \sin \theta \cos \theta) + L n^2 \cos^2 \theta]$
	$-\frac{dr_1}{d\gamma} \mu R e sn$ (n° 85)
Termes $\sum mg \frac{dz}{d\gamma}$ (gravité).	
Roue motrice...	Néant. (n° 85)
Roue directrice..	$+ \mu_1 R g \sin \theta_1 \sin \alpha \cos \theta \frac{dr_1}{d\gamma}$ (n° 85)
	$- \mu_1 R g \sin \omega \sin \varrho$ (n° 91)
Cadre monté....	$+ \mu e g \cos \theta \frac{dr_1}{d\gamma}$ (n° 85)

(1) Même remarque qu'au n° 92 pour le bras du levier $S_1 - O_1$ substitué au bras du levier $S_1 - B$.

(2) Valeur du parallélépipède $[\mathbf{K} \mathbf{G} k_1]$ intuitive par la Géométrie.

L'équation d'équilibre du guidon s'obtient en égalant la somme des termes du premier Tableau à celle du second Tableau.

95. *Équation du guidon simplifié.* — La part de l'inertie qui vient de la roue directrice s'écrit

$$- [B_1 s_1 n \cos \theta_1 + (B_1 - C_1) n^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1] \\ \times \left[\sin \alpha \cos \theta \frac{d\tau_1}{d\gamma} + \sin \tau_1 \cos \alpha + \sin \theta \cos \tau_1 \sin \alpha \right].$$

Comme au n° 86, je néglige le second ordre des angles γ , θ et, par suite, de leurs fonctions α et $\beta = -\theta_1$. Le second facteur contient un terme fini : $\sin \tau_1 \cos \alpha$. Les deux autres termes sont du second ordre, car $\frac{d\tau_1}{d\gamma}$ est du premier ordre (n° 66).

En résumé, le terme d'inertie de la roue directrice simplifié est

$$(1) \quad - B_1 s_1 n \cos \theta_1 \sin \tau_1 \cos \alpha.$$

Quant à l'inertie du cadre, elle se réduit d'abord à

$$\frac{d\tau_1}{d\gamma} [\mu \text{Re} s n \sin \theta + L n^2 \cos^2 \theta] - \frac{d\gamma}{d\tau_1} \mu \text{Re} s n.$$

D'après les formules du n° 66, $\frac{d\tau_1}{d\gamma}$ est du premier ordre et $\frac{d\gamma}{d\tau_1}$, d'ordre zéro.

Le terme en $\frac{d\tau_1}{d\gamma}$ est donc du troisième ordre et le terme en $\frac{d\gamma}{d\tau_1}$, du premier.

Comme les coefficients μRe et L ne sont pas très éloignés de l'égalité, on n'a pas à craindre des compensations numériques venant de leur disproportion, et l'on peut limiter les termes de l'inertie du cadre à

$$(2) \quad - \frac{d\gamma}{d\tau_1} \mu \text{Re} s n.$$

Il faut maintenant examiner les termes venant de la pesanteur. J'ai

d'abord le terme de la roue directrice

$$(3) \quad -\mu_1 R g \sin \omega \sin \beta,$$

qui est de premier ordre; puis deux termes en $g \frac{dr_1}{d\gamma} \cos \theta$:

$$g \frac{dr_1}{d\gamma} \cos \theta [\mu_1 R \sin \theta \sin \alpha + \mu e].$$

Le premier terme du crochet est du second ordre, et le second d'ordre zéro.

Il importe de comparer aussi les coefficients finis $\mu_1 R$ et μe . On peut adopter

$$\begin{aligned} \mu &= 70^{\text{kg}}, & e &= 0^{\text{m}}, 15, \\ \mu_1 &= 57^{\text{kg}}, & R &= 0^{\text{m}}, 38, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mu e}{\mu_1 R} = \frac{10,5}{3,9}.$$

Le résultat est favorable et l'on peut sans crainte réduire le terme étudié à

$$(4) \quad \mu e g \frac{dr_1}{d\gamma} \cos \theta.$$

L'équation du guidon simplifiée s'obtient en réunissant par le signe égal la somme des termes (1) et (2) à la somme des termes (3) et (4), ce qui donne

$$B_1 s_1 n \cos \theta_1 \sin \tau_1 \cos \alpha + \frac{dv}{d\gamma} \mu R e s n - \mu_1 R g \sin \omega \sin \beta + \mu e g \frac{dr_1}{d\gamma} \cos \theta = 0.$$

Je remplace

$$\begin{aligned} \theta_1 &\text{ par } -\beta, && (\text{n}^\circ \text{ 38}), \\ s_1 & \text{ » } \frac{s}{\cos \alpha} && (\text{II, n}^\circ \text{ 66 bis, valeur approchée}), \\ \frac{dr_1}{d\gamma} & \text{ » } \frac{-(R \sin \omega - c) \sin \beta}{l \cos \theta} && (\text{n}^\circ \text{ 66} \quad \text{ » } \quad), \\ \frac{dv}{d\gamma} & \text{ » } \frac{(R \sin \omega - c) \cos \beta}{l \cos \alpha} && (\text{n}^\circ \text{ 66} \quad \text{ » } \quad). \end{aligned}$$

L'équation du guidon devient

$$sn \left[B, \cos \beta \sin \eta + \mu R e \frac{R \sin \omega - c}{l \cos \alpha} \cos \beta \right] - \mu_1 R g \sin \omega \sin \beta - \mu e g \frac{R \sin \omega - c}{l} \sin \beta = 0.$$

Je remplace enfin n par sa valeur $\frac{R}{l} \tan \alpha s$ (n° 87), B , par $2 \mu_1 R^2$ (n° 4) et je divise les deux membres de l'équation par $R g \cos \beta$. Elle devient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\mu_1 \sin \omega + \frac{\mu e}{R} \frac{R \sin \omega - c}{l} \right) \tan \beta \\ & = \left(2 \mu_1 \sin \eta + \mu \frac{e}{R} \frac{R \sin \omega - c}{l} \right) \frac{R}{l} \frac{R s^2}{g} \tan \alpha. \end{aligned} \right.$$

Cette équation peut encore s'écrire, en remplaçant le second facteur du second membre par sa valeur (3)' du n° 86 bis, puis $\tan \beta$ par $-\tan \theta_1$.

$$(1)' \quad \left(\mu_1 + \frac{\mu e}{R} \frac{R \sin \omega - c}{l} \right) \tan \theta_1 = \left(2 \mu_1 \sin \eta + \mu \frac{e}{R} \frac{R \sin \omega - c}{l} \right) \tan \theta.$$

96. *Application numérique.* — Pour se rendre compte de l'importance relative des divers termes, il convient de faire une application numérique. J'adopterai

$$\begin{aligned} e &= 0^m, 15 & \eta &= 25^\circ & \mu &= 70^{\text{kg}} \\ R &= 0, 38 & & & \mu_1 &= 5^{\text{kg}} \\ l &= 1, 10 & & & & \\ c &= 0, 08 & & & & \end{aligned}$$

De ces données on déduit

$$\begin{aligned} \frac{e}{R} &= 0, 395, & \sin \eta &= 0, 422, & \frac{R \sin \eta - c}{l} &= 0, 073, & 2 \sin \eta &= 0, 844, \\ \mu \frac{e}{R} &= 27^{\text{kg}}, 6, & R \sin \eta &= 0, 16, & \mu \frac{e}{R} \frac{R \sin \eta - c}{l} &= 2^{\text{kg}}, 0, & 1 - 2 \sin \eta &= 0, 156 \\ & & R \sin \eta - c &= 0, 08 & & & \mu_1 (1 - 2 \sin \eta) &= 0^{\text{kg}}, 78, \\ & & c. & & & & & 20 \end{aligned}$$

Ces constantes fixées, je remarque que $\mu \frac{e}{R} \frac{R \sin \omega - c}{l}$ a pour limite supérieure $\mu \frac{e}{R} \frac{R \sin \eta - c}{l}$ et en diffère de $\mu \frac{e}{R} \frac{R}{l} (\sin \omega - \sin \eta)$. Je suis ainsi conduit à prendre les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu_1 + \frac{\mu e}{R} \frac{R \sin \eta - c}{l} = 7^{\text{kg}}, \\ \mu'' &= \mu \frac{e}{l} = 9^{\text{kg}}, 5.\end{aligned}$$

Comme $2 \sin \eta$ diffère peu de 1, je poserai encore

$$\mu''' = \mu_1 (1 - 2 \sin \eta) = 0^{\text{kg}}, 78.$$

Avec ces notations, l'équation (1)' du n° 93 pourra s'écrire

$$(1) \quad [\mu' + \mu'' (\sin \omega - \sin \eta)] \tan \theta_1 = [\mu' + \mu'' (\sin \omega - \sin \eta) - \mu'''] \tan \theta.$$

97. — *Conséquences; nécessité des déplacements latéraux du corps.* — Je trouve bien, comme il était à prévoir, une valeur de θ_1 de même signe que θ : les deux roues doivent pencher du même côté dans une conversion. Mais ce qui peut surprendre, c'est de trouver la valeur

$$\theta_1 < \theta \quad [\text{formule (1), n° 96}],$$

alors que la Géométrie impose à θ_1 la nécessité d'être supérieur à θ ; cela est intuitif et résulte d'ailleurs de la formule

$$\sin \theta_1 = \sin \theta \cos \gamma - \cos \theta \sin \gamma \sin \eta \quad (\text{n° 37})$$

si l'on se rappelle que γ est négatif quand θ est positif (n° 36 bis).

Il résulte de cette contradiction que la position normale ($\alpha = \theta = \alpha = \beta$) est la seule position possible d'équilibre sans les mains. *Ainsi, il serait impossible d'effectuer une conversion sans les mains.*

Mais la conclusion n'est valable que si le cavalier observe l'hypothèse

du calcul de *maintenir son centre de gravité dans le plan du cadre*. C'est donc par un déplacement latéral du corps que le cavalier devra, non seulement déterminer un changement dans le régime d'équilibre, mais encore conserver le nouveau régime.

98. *Influence d'un déplacement latéral du corps sur les équations de l'équilibre.* — Pour l'équation de chute, nous avons vu que l'équilibre s'établit sensiblement entre la force centrifuge et la gravité. Or le moment de la première force n'est pas changé sensiblement par le déplacement latéral du corps. Quant au moment de la gravité, il était $\mu gh \sin \theta$; il sera maintenant

$$\mu gh \sin(\theta + \varepsilon),$$

en désignant par ε le déplacement angulaire du plan qui passe par le centre de gravité et la trace OI du cadre. Ainsi, l'équation d'équilibre de chute sera

$$\mu R h \frac{R}{l} s^2 \tan \alpha \cos \theta + \mu gh \sin(\theta + \varepsilon) = 0 \quad [\text{cf. n}^\circ \text{ 86, \textit{éq. (3)}}].$$

Je passe à l'équation du guidon. Il n'y a rien à changer aux termes de la roue directrice; les termes du cadre contiennent $\frac{d\eta}{d\gamma}$ ou $\frac{d\nu}{d\gamma}$; ils viennent de $\frac{\partial M}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial M}{\partial \nu}$. Or, les variations de ces vitesses virtuelles sont négligeables quand le corps se déplace latéralement. Ainsi, l'équation du guidon n'est pas changée, et les deux équations *approchées* de l'équilibre sans les mains sont, *pour de petits angles*,

$$(\delta\theta) \quad \alpha = - \frac{l}{R} \frac{g}{R s^2} (\theta + \varepsilon),$$

$$(\delta\gamma) \quad \theta_1 = - \frac{\mu' + \mu''(\omega - \eta) - \mu'''}{\mu' + \mu''(\omega - \eta)} \frac{R}{l} \frac{R s^2}{g} \alpha,$$

ou, en portant dans l'équation $(\delta\gamma)$ la valeur de α tirée de $(\delta\theta)$,

$$\theta_1 = \frac{\mu' + \mu''(\omega - \eta) - \mu'''}{\mu' + \mu''(\omega - \eta)} (\theta + \varepsilon).$$

La présence de ε dans cette formule la rend compatible avec les relations géométriques et rend possibles les conversions sans les mains.

§ III. — STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE AVEC LES MAINS.

99. *Force vive des trois parties de la bicyclette.* — Inutile pour les équations de régime (n° 80), elle devient nécessaire à calculer ici. La double force vive des roues a pour valeur

$$\begin{aligned} \text{Roue motrice} \dots\dots\dots 2T_1 &= A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 \\ &= A_1 p^2 + B_1 (s + n \sin \theta)^2 + C_1 n^2 \cos^2 \theta; \\ \text{Roue directrice} \dots\dots\dots 2T_2 &= A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 \\ &= A_1 p_1^2 + B_1 (s_1 + n_1 \sin \theta_1)^2 + C_1 n_1^2 \cos^2 \theta_1. \end{aligned}$$

Je passe à la force vive du cadre monté; son mouvement se compose de trois parties: la translation qui résulte du roulement de la roue motrice sur le sol IR s ; la rotation d'entraînement $\Phi = Ip + Kn$ autour du centre instantané O; enfin la rotation du cadre $-\tau'j$ autour du centre S de la roue motrice. La vitesse d'un point M est donc

$$M' = IRs + |\Phi(M - O) - \tau'j(M - S)|.$$

Le dernier terme s'écrit

$$\begin{aligned} -\tau'j(M - S) &= -\tau'j(M - O) - \tau'j(O - S) \\ &= -\tau'j(M - O) + R\tau'I. \end{aligned}$$

Je porte la dernière expression de $-\tau'j(M - S)$ dans la valeur de M' et je pose

$$\Psi = \Phi - \tau'j = Ip + j(n \sin \theta - \tau') + kn \cos \theta;$$

j'obtiens, pour la vitesse M' , l'expression binome

$$M' = IR(s + \tau') + |\Psi(M - O)|.$$

Je désigne par V et V_1 les deux termes de M' ; on aura, pour le carré de la vitesse,

$$M'^2 = V^2 + 2V|V_1 + V_1^2, \quad \begin{cases} V = IR(s + \tau'), \\ V_1 = |\Psi(M - O). \end{cases}$$

Chacun de ces trois termes donne lieu à une force vive que je calcule

$$(1) \quad \sum mV^2 = \mu R^2 (s + \tau')^2.$$

$$(2) \quad 2 \sum mV|V_1 = 2 \sum mR(s + \tau')[I\Psi(M - O)] \\ = 2\mu R h (s + \tau')[I\Psi k] = 2\mu R h (s + \tau')(n \sin \theta - \tau').$$

$$(3) \quad \sum mV_1^2 = Ap^2 + B(n \sin \theta - \tau')^2 + Cn^2 \cos^2 \theta - 2Lpn \cos \theta. \\ \text{(Formule connue et n° 2.)}$$

La double force vive du cadre monté est la somme de ces trois parties : (1), (2), (3).

On a un résumé, pour la double force vive de la bicyclette,

$$\text{Cadre monté} \dots \dots \quad 2T_0 = \mu R^2 (s + \tau')^2 + 2\mu R h (s + \tau')(n \sin \theta - \tau') \\ + Ap^2 + B(n \sin \theta - \tau')^2 + Cn^2 \cos^2 \theta - 2Lpn \cos \theta,$$

$$\text{Roue motrice} \dots \dots \quad 2T_1 = A_1 p^2 + B_1 (s + n \sin \theta)^2 + C_1 n^2 \cos^2 \theta,$$

$$\text{Roue directrice} \dots \dots \quad 2T_2 = A_1 p_1^2 + B_1 (s_1 + n_1 \sin \theta_1)^2 + C_1 n_1^2 \cos^2 \theta_1.$$

100. *Formation de l'équation de chute.* — L'équation de chute est

$$(\partial \theta) \quad \left(\frac{dT}{d\theta'} \right)' - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' + \sum m g \frac{dz}{d\theta} = 0. \right.$$

Je rappelle que l'on a $\theta' = p$ et que les trois vitesses indépendantes sont s , p et γ' . L'expression de $2T$ contient en outre les vitesses n , τ' , n_1 , s_1 et p_1 , qui sont fonctions des premières d'après les formules établies aux n^{os} 66 et 66 bis. On a donc

$$\frac{dT}{dp_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{dp} + \frac{\partial T}{\partial n} \frac{dn}{dp} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial n_1} \frac{dn_1}{dp} + \frac{\partial T}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dp} + \frac{\partial T}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dp} \right),$$

et l'on en déduit

$$\left(\frac{dT}{dp}\right)' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)' + \left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right)' \frac{dr'}{dp} + \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)' \frac{dn}{dp} + \frac{\partial T}{\partial r'} \left(\frac{dr'}{dp}\right)' + \frac{\partial T}{\partial n} \left(\frac{dn}{dp}\right)' + \dots$$

Je m'occupe d'abord du cadre monté, qui est la partie la plus importante de la bicyclette, et je calcule chacune des trois dérivées partielles de sa force vive :

$$(1) \frac{\partial T_0}{\partial p} = Ap - Ln \cos \theta,$$

$$(2) \frac{\partial T_0}{\partial r'} = \mu R^2 (s + r') + \mu R h (-s - 2r' + n \sin \theta) - B(n \sin \theta - r'),$$

$$(3) \frac{\partial T_0}{\partial n} = \mu R h (s + r') \sin \theta + B \sin \theta (n \sin \theta - r') + Cn \cos^2 \theta - Lp \cos \theta.$$

Quant aux valeurs des coefficients différentiels $\frac{dr'}{dp}$ et $\frac{dn}{dp}$, elles sont égales (n° 66) aux valeurs de $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{dn}{d\theta}$ déjà trouvées [(1), n° 66]. Ainsi l'on connaît $\frac{dT_0}{dp}$; on en déduirait $\left(\frac{dT_0}{dp}\right)'$ en dérivant l'expression trouvée par rapport au temps. Les termes ainsi trouvés, ajoutés à ceux qu'on a déjà obtenus pour le cadre (n° 35), fourniraient la partie de l'équation de chute qui vient du cadre. On aurait de même les parties venant des deux roues. Le calcul complet menace de conduire à des écritures aussi longues qu'infructueuses; il convient de chercher seulement, pour les retenir, les termes qui intéressent notre problème de stabilité.

101. *Forme de l'équation caractéristique de stabilité.* — Soit f le premier membre de l'équation de chute dont je veux éviter d'écrire le développement complet. L'équation caractéristique de stabilité (n° 76) est ici

$$\frac{df}{d\theta'} \lambda^2 + \frac{df}{d\theta'} \lambda + \frac{df}{d\theta} = 0$$

ou, en remplaçant θ' par p ,

$$(C) \quad \frac{df}{dp'} \lambda^2 + \frac{df}{dp} \lambda + \frac{df}{d\theta} = 0.$$

Je vais étudier les termes extrêmes et montrer qu'ils sont de signes contraires; il en résultera que l'équation caractéristique (C) a ses racines réelles et de signes contraires. Par suite, l'équilibre sera instable.

102. Coefficient $\frac{df}{dp}$ de l'équation caractéristique. — Des trois termes de l'équation de Lagrange modifiée (n° 80), $\left(\frac{dT}{dp}\right)'$ est le seul qui contienne des accélérations; ce sera le seul à fournir des termes de $\frac{df}{dp}$. Je m'occupe d'abord du cadre monté. Je trouve dans $\frac{\partial T_0}{\partial p}$ [(1), n° 100] le terme Ap qui, dérivé, donne dans $\left(\frac{dT}{dp}\right)'$ le terme Ap' . Ce terme donnera dans $\frac{df}{dp}$ le terme A . C'est un terme considérable, puisqu'il représente le moment d'inertie du cadre, avec son cavalier, autour de la trace OI de la bicyclette. La vitesse p figure aussi explicitement dans $\frac{\partial T_0}{\partial n}$ [(3), n° 100], au dernier terme $-Lp \cos \theta$; ce terme fournit, dans l'expression de $\frac{dT_1}{dp}$ (n° 100), celui-ci :

$$-Lp \cos \theta \frac{dn}{dp}.$$

Outre que L est notablement plus petit que A , la valeur de $\frac{dn}{dp} = \frac{dv}{d\theta}$ est, comme on l'a expliqué au n° 86, du second ordre par rapport aux angles θ, v . Ainsi le nouveau terme $-L \cos \theta \frac{dn}{dp}$ de $\frac{df}{dp}$ est négligeable devant le premier A . D'autres termes en p' entrent implicitement dans $\left(\frac{dT_0}{dp}\right)'$, pour la raison que η' et n sont des fonctions de p définies par les formules du n° 66. Mais tous les termes ainsi définis sont négligeables, comme il est facile de le reconnaître.

Prenons, par exemple, $\left(\frac{\partial T_0}{\partial \eta'}\right)' \frac{d\eta'}{dp}$; $\frac{\partial T_0}{\partial \eta'}$ contient le terme $\mu R^2 \eta'$ (n° 100); on doit remplacer η' par sa valeur déduite de la formule (1) du n° 66 :

$$\eta' = \frac{-y}{x \cos \theta} p.$$

Quand on formera $\left(\frac{\partial T_0}{\partial \tau'}\right)'$, la dérivée du terme $\mu R^2 \tau'$ contiendra un seul terme d'accélération

$$- \mu R^2 \frac{\gamma}{x \cos \theta} p',$$

soit, pour $\left(\frac{dT_0}{dp}\right)'$, le terme

$$- \mu R^2 \frac{\gamma}{x \cos \theta} p' \frac{d\tau'}{dp}$$

ou, en remplaçant $\frac{d\tau'}{dp}$ par sa valeur $-\frac{\gamma}{x \cos \theta}$,

$$+ \mu R^2 \left(\frac{\gamma}{x \cos \theta}\right)^2 p'.$$

Le moment d'inertie μR^2 est déjà inférieur à la moitié de A ; $\frac{\gamma}{x \cos \theta}$ est du premier ordre par rapport aux angles θ , γ , et contient en outre le facteur $\frac{R \sin \mu - C}{l} < 0,073$. Ainsi le nouveau terme en p' est négligeable devant $A p'$. On voit de même qu'il en est ainsi de tous les autres. La roue motrice donne le terme $A_1 p'$ que l'on peut confondre avec le précédent $A p'$, ce qui revient à augmenter légèrement la constante A ; enfin la roue directrice aura une légère influence additive qu'on peut, par approximation, confondre aussi dans $A p'$.

En résumé, l'expression de $\frac{df}{dp'}$ peut être réduite à la valeur

$$\frac{df}{dp'} = A.$$

105. *Deux remarques sur la nature du coefficient $\frac{df}{d\theta}$ de l'équation caractéristique.* — Il importe d'abord de bien préciser la signification de la dérivée $\frac{df}{d\theta}$. Le degré de liberté de la bicyclette est 3, et les paramètres choisis sont les angles de roulement, de chute et de guidon σ , θ et γ . Le premier σ n'entre que par la vitesse de roulement s , mais jamais par lui-

même. L'angle γ n'entre que par lui-même et non par sa vitesse, puisque l'angle de guidon est maintenu fixe par la main du cavalier. Enfin l'angle θ entre par lui-même et par ses deux premières dérivées. De plus, les quantités $\gamma, s, \theta, \theta', \theta''$ entrent, explicitement d'abord, puis implicitement dans les autres variables, angles, vitesses ou accélérations. C'est ainsi que la vitesse de conversion n , à l'état de régime, a pour valeur

$$n = \frac{R}{l} s \operatorname{tang} \alpha \quad [(2), \text{n}^\circ 86].$$

Elle est donc une fonction de s et aussi de l'angle α , qui lui-même est une fonction de θ et γ définie par les formules du n° 57.

Dans la dérivation $\frac{df}{d\theta}$, les quantités $\gamma, s, \theta', \theta''$ doivent être traitées comme des constantes. C'est ainsi que l'on aura, par exemple,

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{R}{l} s \frac{d \operatorname{tang} \alpha}{d\theta}.$$

La dérivée $\frac{d \operatorname{tang} \alpha}{d\theta}$ doit être déduite des formules du n° 57; on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\cos \eta \sin \gamma}{\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \eta} \quad (\text{n}^\circ 57).$$

On en déduit

$$\frac{d \operatorname{tang} \alpha}{d\theta} = \frac{\partial \operatorname{tang} \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial \operatorname{tang} \alpha}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\theta}.$$

Je calcule d'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{tang} \alpha}{\partial \theta} &= \frac{-\cos \eta \sin \gamma}{(\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \eta)^2} (-\sin \theta \cos \gamma + \cos \theta \sin \gamma \sin \eta), \\ \frac{\partial \operatorname{tang} \alpha}{\partial \eta} &= \frac{-\sin \eta \sin \gamma}{\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \eta} - \frac{\cos \eta \cos \gamma}{(\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \sin \eta)^2} \sin \theta \sin \gamma \cos \eta. \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\frac{d\eta}{d\theta}$ par $\frac{-x}{x \cos \theta}$ (n° 66), on voit que la deuxième partie de la dérivée de $\operatorname{tang} \alpha$ est négligeable devant la première. Celle-ci est d'ailleurs du second ordre par rapport aux angles θ, γ .

Voici une deuxième remarque destinée à simplifier le calcul de $\frac{df}{d\theta}$;

f contient deux espèces de termes : d'abord la partie φ , qui représente le premier membre de l'équation d'équilibre, puis la partie ψ , qui est nulle dans un état de régime. Chaque terme de la partie ψ contient en facteur une accélération ou une vitesse nulle p' , p , γ'' , γ' . Envisageons par exemple le terme Pp ; dérivé par rapport à θ , il donne le terme $\frac{dP}{d\theta}p$ qui s'annule encore quand on remplace p par la valeur zéro correspondante à l'état de régime dont on étudie la stabilité (n° 76). Il reste donc seulement à dériver la partie φ par rapport à θ .

104. *Signe du coefficient $\frac{df}{d\theta}$ de l'équation caractéristique de stabilité.*

— Je prie le lecteur de se reporter au n° 85 qui offre tous les termes du premier membre φ de l'équation d'équilibre. J'examine d'abord l'action de la gravité sur le cadre monté $+\sum mg \frac{dz}{d\theta}$, je lis

$$- \mu gh \sin \theta - \mu ge \cos \theta \frac{d\eta}{d\theta}.$$

Dérivée par rapport à θ , cette expression donne

$$- \mu gh \cos \theta + \mu ge \sin \theta \frac{d\eta}{d\theta} - \mu ge \cos \theta \frac{d^2 \eta}{d\theta^2}.$$

Le premier de ces trois termes est essentiellement négatif. Pour évaluer sa valeur numérique, j'adopte les nombres

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 70^{\text{kg}} \\ h = 1^{\text{m}} \end{array} \right\} \text{d'où } \mu gh = 70 \text{ kilogrammètres } \quad (1).$$

Le terme suivant est négligeable devant le premier, car il contient deux

(1) μ est exprimé en kilogrammes-masses; μg , en kilogrammes-poids, de sorte que μgh est exprimé en kilogrammètres.

facteurs petits $\sin \theta$ et $\frac{d\eta}{d\theta}$, puis μge est inférieur à μgh . Le troisième terme mérite plus d'attention. Il me faut calculer $\frac{d^2\eta}{d\theta^2}$ au moyen de la formule

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-y}{x \cos \theta} \quad [(1), \text{n}^\circ 66].$$

J'obtiens

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} = \frac{-\frac{dy}{d\theta}}{x \cos \theta} + \frac{y}{x^2 \cos \theta} \frac{dx}{d\theta} - \frac{y}{x \cos^2 \theta} \sin \theta,$$

d'où je déduis

$$-\mu ge \cos \theta \frac{d^2\eta}{d\theta^2} = +g \frac{\mu e}{x} \frac{dy}{d\theta} + \mu ge \frac{y}{x} \left\{ -\frac{1}{x} \frac{dx}{d\theta} + \tan \theta \right\}.$$

$g \mu e \frac{y}{x}$ et $\tan \theta$ sont petits; donc le deuxième terme du crochet est négligeable. Il en est de même du premier, car, sans faire le calcul, on reconnaît que $\frac{1}{x} \frac{dx}{d\theta}$ est petit. Reste à examiner le premier terme $g \frac{\mu e}{x} \frac{dy}{d\theta}$. Pour calculer $\frac{dy}{d\theta}$, je pars de la valeur de y (n° 89)

$$y = \sin \theta \left\{ -2c \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin \eta + (c - R \sin \omega) \tan \theta \sin \gamma + c \sin \eta (1 - \cos \gamma) \right. \\ \left. + (c - R \sin \omega) \frac{\cos \theta \sin \gamma}{\sin \theta} \right\}.$$

Le premier et le troisième termes du crochet se détruisent; le deuxième et le quatrième donnent pour $\frac{dy}{d\theta}$ des résultats négligeables.

Après la gravité du cadre, je considère celle de la roue motrice. Elle donne, pour $\frac{df}{d\theta}$, le terme $-\mu_1 g R \cos \theta$, qui s'ajoute simplement au terme semblable du cadre. Enfin la roue directrice donnera un terme d'une forme un peu différente que l'on peut, par approximation, confondre encore dans les précédents.

En résumé, l'ensemble des termes de la gravité peut être réduit à

$$- \mu g h \cos \theta,$$

pourvu que, par le coefficient $\mu g h$, on représente, non pas seulement celui qui vient du cadre, mais celui-ci augmenté d'environ $2 \mu R$, provenant des roues. Cela revient, si l'on veut, à négliger les roues et à augmenter, par compensation, le poids du cavalier.

Je passe maintenant aux termes venant des forces centrifuges. Le cadre fournira encore les termes dominants. Le plus important des termes de

$$- \sum m M' \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \text{ est}$$

$$- \mu R h s n \cos \theta.$$

Dans la dérivation par rapport à θ , il donne les deux termes

$$+ \mu R h s n \sin \theta - \mu R h s \cos \theta \frac{dn}{d\theta}.$$

Le rapport du premier de ces deux termes à celui de la gravité est

$$\frac{\mu R h s n \sin \theta}{- \mu g h \cos \theta},$$

ou, en remplaçant n par sa valeur $n = \frac{R}{l} s \tan \alpha$ [(2), n° 36], et simplifiant,

$$- \frac{R s^2}{g} \frac{R}{l} \tan \alpha \tan \theta = + \tan^2 \theta \quad [(3)', \text{n° 36 bis}].$$

Ce rapport est négligeable. Le second terme est aussi négligeable devant celui de la gravité, car il est aussi du second ordre par rapport aux angles θ , γ , d'après la première remarque du n° 103. Tous les autres termes venant des forces centrifuges de l'équation d'équilibre donnent lieu à des termes qui, visiblement, sont au moins du second ordre. En résumé,

$\frac{df}{d\theta}$ peut être réduit sensiblement au terme de la gravité

$$- \mu gh \cos \theta.$$

Ce terme est essentiellement négatif.

105. *L'équilibre de la bicyclette est instable quand le guidon est maintenu fixe.* — L'équation caractéristique de stabilité est

$$\frac{df}{dp'} \lambda^2 + \frac{df}{dp} \lambda + \frac{df}{d\theta} = 0.$$

Nous avons vu que $\frac{df}{dp'}$ est positif (n° 102), tandis que $\frac{df}{d\theta}$ est négatif (n° 104). On en conclut que l'équation caractéristique a ses racines réelles et de signes contraires. Il en résulte (n° 76) que le mouvement est instable. Il est à remarquer que les termes extrêmes de l'équation caractéristique que nous avons considérés sont indépendants de la vitesse de roulement s . En examinant le terme $\frac{df}{dp} \lambda$, on voit qu'il est peu important, et l'on en conclut que l'instabilité est sensiblement la même que si la bicyclette ne marchait pas. On se rend compte, en effet, que la marche de la bicyclette ne peut pas avoir d'influence sensible sur la stabilité, quand le guidon est maintenu fixe. Pour le voir, imaginez que l'angle de chute θ soit trop grand pour la vitesse s et l'angle de guidon γ ; θ tend à augmenter par l'effet de la gravité qui l'emporte; le moment de la pesanteur, déjà trop fort, augmente; mais l'angle γ étant maintenu fixe, la vitesse de conversion n n'est pas sensiblement changée. Le moment de la force centrifuge reste à peu près constant et tend même à diminuer. La pesanteur l'emporte de plus en plus sur la force centrifuge.

On voit par là le danger que pourrait courir un cavalier dont le guidon serait, pour une raison quelconque, invariablement fixé au cadre. La chute serait pour lui inévitable. Certaines bicyclettes portent une clavette qui permet d'arrêter ainsi le guidon. Cette disposition ne paraît pas sans

danger; il suffirait d'une inadvertance ou d'un hasard fâcheux pour être exposé à une chute certaine.

106. *Sur le maintien de l'équilibre à l'aide du guidon.* — Le résultat du n° 103 montre que l'on ne peut pas monter à bicyclette sans apprentissage. Il n'est pas question seulement d'être équilibriste ou même adroit. Il est indispensable d'apprendre par expérience la corrélation qui existe entre les mouvements presque insensibles du guidon et le relèvement ou la chute de la bicyclette. Nous avons vu le peu d'influence d'un déplacement latéral du corps sur l'équilibre. Toute l'habileté du cavalier réside donc dans la manière de conduire le guidon; et il faut qu'il le fasse avec calme et même avec lenteur. C'est pour cela que les personnes vives et nerveuses ont quelque peine à apprendre la bicyclette.

Je rappelle à ce sujet l'expérience que j'ai indiquée au n° 86 bis : Un cavalier, habitué à conduire avec les deux mains, ou même seulement avec la main droite, éprouvera quelque difficulté à conduire pour la première fois de la main gauche, ou en tenant le milieu du guidon, au lieu des extrémités.

D'après les résultats obtenus, on doit comprendre ainsi le jeu du guidon dans l'équilibre de la bicyclette et la stabilité qui en résulte :

Le cavalier se place dans une position voisine de l'équilibre; mais l'angle de chute est, par exemple, à gauche et trop grand. Il y a commencement de chute à gauche. Pour la corriger, le cavalier tourne à peine le guidon à gauche; quoique insensiblement, il le fait à l'excès et le cadre, après s'être relevé, dépasse la position d'équilibre. Le cavalier tourne le guidon à droite et dépasse encore la position d'équilibre. Ainsi, le cavalier oscille autour de la position qu'il cherche, tout comme s'il était en état d'équilibre stable.

L'explication que je viens de donner est confirmée par l'observation des traces marquées sur le sol par une bicyclette en marche rectiligne : on voit les traces des deux roues s'entrecouper presque périodiquement, ce qui indique que l'équilibre est rompu alternativement dans les deux sens. Il

faut ajouter que la périodicité des coups de pédale tend à régler et à rendre périodiques les oscillations du cavalier. Les commençants donnent aux oscillations des amplitudes exagérées ; les cavaliers exercés les réduisent au point de les rendre à peine sensibles.

§ IV. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN ÉTAT INFINIMENT VOISIN DE LA MARCHÉ RECTILIGNE.

107. Limitation du problème. — Par ce qui précède on peut juger de la complication qu'entraînerait le calcul complet relatif à la stabilité d'un régime quelconque de l'équilibre sans les mains. D'autre part, nous avons vu qu'en dehors de la marche rectiligne, le cavalier ne peut obtenir de régime d'équilibre que par un déplacement latéral du corps.

Il en résulte que les conversions sont limitées à un assez grand rayon.

On aura donc une idée suffisante de la stabilité en se bornant au cas de la marche rectiligne. Les formules reçoivent dans ce cas une grande simplification, parce qu'il ne reste à conserver dans les équations du mouvement que les termes du premier ordre par rapport aux infiniment petits

$$\theta, \quad \gamma, \quad \theta', \quad \gamma', \quad \theta'', \quad \gamma''.$$

Il importe, pour la facilité de leur usage, de reporter ici les formules répandues dans le Mémoire et dont nous aurons besoin, avec les simplifications que comporte le cas particulier qui nous occupe.

108. Formules simplifiées. — Dans la formule (2) du n° 56, je fais le changement de notations qui consiste à remplacer μ par ω et σ par η (n° 53 bis). Quand on néglige le second ordre, cette formule devient $\omega = \eta$.

Dès lors, la formule (1) du même n° 56 montre que la variation η_1 de l'angle du cadre η est du second ordre. Il en est de même de sa vitesse η'_1 .

Ainsi, quand on néglige le second ordre, les formules du n° 56 donnent

$$(1) \quad \omega = \tau_1 = \tau_{10}, \quad \omega' = \tau_1' = 0.$$

Les angles α et β calculés au n° 57 ont pour valeurs principales

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \cos \tau_1, \\ \beta = -\theta_1 = -\theta + \gamma \sin \tau_1, \end{cases}$$

d'où l'on tire leurs dérivées

$$\begin{aligned} \alpha' &= \gamma' \cos \tau_1, \\ \beta' &= -\theta_1' = -\theta' + \gamma' \sin \tau_1. \end{aligned}$$

Je considère maintenant la valeur (2) de y trouvée au n° 39. Elle se réduit à son dernier terme; pour l'écrire, je désigne $R \sin \omega - c$ par la lettre c_1 .

Celle-ci sera traitée comme une constante, parce que la variation de ω est du second ordre.

J'obtiens ainsi les formules

$$(3) \quad c_1' = 0, \quad y = -c_1 \gamma, \quad y' = -c_1 \gamma'.$$

J'ai ensuite la série des formules déduites des formules (1) du n° 66 :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{c_1}{l} \gamma, & \left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)' = \frac{c_1}{l} \gamma', \\ \frac{d\eta}{d\gamma} = \frac{c_1}{l} (\theta - \gamma \sin \tau_1), & \left(\frac{d\eta}{d\gamma}\right)' = \frac{c_1}{l} (p - \gamma' \sin \tau_1), \\ \frac{d\nu}{d\theta} = 0, & \left(\frac{d\nu}{d\theta}\right)'_1 = 0, \\ \frac{d\nu}{d\gamma} = \frac{c_1}{l}, & \left(\frac{d\nu}{d\gamma}\right)' = 0. \end{cases}$$

A ces valeurs, il convient de joindre celles des dérivées $\frac{d\sigma_1}{d\theta}$, $\frac{d\sigma_1}{d\gamma}$. On les

déduit de l'équation $(\delta\sigma_1)$ du n° 66 par les formules

$$\frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta} \frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\nu} \frac{d\nu}{d\theta}, \quad \frac{d\sigma_1}{d\gamma} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta} \frac{d\eta}{d\gamma} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\nu} \frac{d\nu}{d\gamma}.$$

Je trouve

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d\sigma_1}{d\theta} = \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{c_1}{l} \gamma, \\ \frac{d\sigma_1}{d\gamma} = \frac{d\eta}{d\gamma} + \frac{l\alpha - y}{R} \frac{d\nu}{d\gamma} = \frac{d\eta}{d\gamma} + \frac{c_1}{l} \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \gamma, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma_1}{d\theta}\right)' &= \frac{c_1}{l} \gamma', \\ \left(\frac{d\sigma_1}{d\gamma}\right)' &= \left(\frac{d\eta}{d\gamma}\right)' + \frac{c_1}{l} \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \gamma'. \end{aligned}$$

Les équations des vitesses (η') , (n) , (σ'_1) du même n° 66 donnent ensuite ⁽¹⁾

$$(6) \quad \begin{cases} \eta' = \frac{c_1}{l} \gamma p + \frac{c_1}{l} (\theta - \gamma \sin \eta) \gamma' \\ \quad \quad \quad (= 0 \text{ quand on néglige le second ordre}), \\ n = \frac{R}{l} \alpha s + \frac{c_1}{l} \gamma' = \frac{R}{l} \cos \eta \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \gamma', \\ \sigma'_1 = s(1 - \alpha^2) + n \frac{l\alpha - y}{R} + \eta'. \end{cases}$$

Je passe aux vitesses de la roue directrice trouvées au n° 66 bis. Les

⁽¹⁾ Dans l'expression de la force vive, on aura besoin des termes du second ordre; c'est pourquoi on les a conservés ici.

équations (1) et (I) de ce numéro se réduisent à celles-ci :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = s_1 + n_1 \theta_1, \\ r_1 = n_1, \\ p_1 = p - \gamma' \sin \eta, \\ s_1 = \sigma_1 - (p\alpha + \eta' + \gamma' \theta_1 \cos \eta) \\ \quad = s - \left(\alpha^2 s + n \frac{\gamma - l\alpha}{R} + p\alpha + \gamma' \theta_1 \cos \eta \right) \quad [(6), \text{n}^\circ 108], \\ n_1 = n + \gamma' \cos \eta = \frac{R}{l} \cos \eta \cdot \gamma s + \left(\frac{c_1}{l} + \cos \eta \right) \gamma'. \end{array} \right.$$

J'aurai besoin aussi des rotations virtuelles de la roue directrice (n^{os} 59 et 60),

$$(\delta\theta) \quad \Theta_1 = I - j \frac{dr_1}{d\theta} + K \frac{d\gamma}{d\theta} + j_1 \frac{d\sigma_1}{d\theta},$$

$$(\delta\gamma) \quad \Gamma_1 = G - j \frac{dr_1}{d\gamma} + K \frac{d\gamma}{d\gamma} + j_1 \frac{d\sigma_1}{d\gamma},$$

et aussi des vitesses de ces vecteurs, réduites au premier ordre; on a d'abord

$$\Theta'_1 = I' - \underset{1.}{j'} \underset{2.}{\frac{dr_1}{d\theta}} + \underset{3.}{j'_1} \underset{4.}{\frac{d\sigma_1}{d\theta}} - j \left(\frac{dr_1}{d\theta} \right)' + K \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right)' + j_1 \left(\frac{d\sigma_1}{d\theta} \right)'. \quad \begin{array}{c} 5. \\ 6. \end{array}$$

Dans cette formule, je dois faire

$$I' = Jn \quad [(4), \text{n}^\circ 3],$$

$$j' = Kp - In \quad [(5), \text{n}^\circ 3],$$

$$j'_1 = Kp_1 - In_1 = K(p - \gamma' \sin \eta) - I(n + \gamma' \cos \eta) \quad [(5), \text{n}^\circ 3 \text{ et } (7), \text{n}^\circ 108],$$

$$j = j_1 = J.$$

La valeur de Γ'_1 se déduit de celle de Θ'_1 en remplaçant $\frac{d}{d\theta}$ par $\frac{d}{d\gamma}$ dans les termes qui suivent le premier; puis le premier terme I' doit être remplacé par la valeur de G' déduite de

$$G = -I \sin \eta + k \cos \eta \quad (\text{n}^\circ 47),$$

savoir :

$$G' = -I' \sin \eta + k' \cos \eta = -Jn \sin \eta - Jp \cos \eta \quad [(4) \text{ et } (5), \text{ n}^\circ \text{ 3}].$$

Il suffit enfin de mettre, à la place de $\frac{d\eta}{d\theta}, \dots$, les valeurs (4) et (5) du présent numéro pour avoir les expressions cherchées de Θ'_1 et Γ'_1 , savoir :

$$\begin{aligned} \Theta'_1 &= + Jn && - \frac{c_1}{l} J\gamma' && + \frac{c_1}{l} J\gamma' \\ &1. && 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5. && 6. \\ \Gamma'_1 &= -J(n \sin \eta + p \cos \eta) && - J \left(\frac{d\eta}{d\gamma'} \right)' && + J \left[\left(\frac{d\eta}{d\gamma'} \right)' + \frac{c_1}{l} \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \gamma' \right] \end{aligned}$$

ou, en définitive,

$$(8) \quad \begin{cases} \Theta'_1 = Jn, \\ \Gamma'_1 = J \left(-n \sin \eta - p \cos \eta + \frac{c_1}{l} \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \gamma' \right). \end{cases}$$

109. *Termes $\left(\frac{dT_0}{d\theta'}\right)'$ et $\left(\frac{dT_0}{d\gamma'}\right)'$ relatifs au cadre.* — Nous avons trouvé pour T_0 au n^o 99 :

$$\begin{aligned} 2T_0 &= \mu R^2 (s + \eta')^2 + 2\mu R h (s + \eta') (n \sin \theta - \eta') \\ &\quad + Ap^2 + B (n \sin \theta - \eta')^2 + Cn^2 \cos^2 \theta - 2Lpn \cos \theta. \end{aligned}$$

Cette expression doit fournir $\left(\frac{dT_0}{d\theta'}\right)'$, par exemple, et l'on doit seulement retenir les termes qui sont du premier ordre par rapport à $\theta, \gamma, \theta', \gamma', \theta'', \gamma''$.

Ceux-ci viennent des termes de $\frac{dT_0}{d\theta'}$ (ou $\frac{dT_0}{dp}$) qui sont aussi du premier ordre; à leur tour, ceux-ci viennent des termes de T_0 qui contiennent p multiplié par un facteur du premier ordre. On peut donc réduire $2T_0$ à la partie qui est du second ordre, savoir :

$$2\mathcal{C}_0 = 2\mu R^2 s \eta' + 2\mu R h s (n\theta - \eta') + Ap^2 + Cn^2 - 2Lpn.$$

Je remplace n et η' par leurs valeurs (6) (n° 108), et j'obtiens

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{C}_0 = & 2\mu R(R-h)\frac{c_1}{l}s[\gamma p + (\theta - \gamma \sin \eta)\gamma'] \\ & + 2\mu Rhs\theta\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma'\right) + Ap^2 + C\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma'\right)^2 \\ & - 2Lp\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma'\right); \end{aligned}$$

je tire de cette formule les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{C}_0}{dp} = & \mu R(R-h)\frac{c_1}{l}\gamma s + Ap - L\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma'\right), \\ \frac{d\mathfrak{C}_0}{d\gamma'} = & \mu R(R-h)\frac{c_1}{l}s(\theta - \gamma \sin \eta) + \mu R h \frac{c_1}{l}s\theta \\ & + C\frac{c_1}{l}\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma'\right) - L\frac{c_1}{l}p, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} (\delta\theta) \quad \left(\frac{dT_0}{dp}\right)' = & \mu R(R-h)\frac{c_1}{l}\gamma' s + Ap' - L\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma' s + \frac{c_1}{l}\gamma''\right); \\ (\delta\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dT_0}{d\gamma'}\right)' = & \mu R(R-h)\frac{c_1}{l}s(p - \gamma' \sin \eta) \\ & + \mu R h \frac{c_1}{l}sp + C\frac{c_1}{l}\left(\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma' s + \frac{c_1}{l}\gamma''\right) - L\frac{c_1}{l}p'. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

110. Termes $\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)'$ et $\left(\frac{dT}{d\gamma'}\right)'$ relatifs à la roue motrice. — On a trouvé pour cette roue (n° 99)

$$2T_1 = A_1 p^2 + B_1 (s + n \sin \theta)^2 + C_1 n^2 \cos^2 \theta.$$

Je remplace n par sa valeur (6) (n° 108), et je conserve seulement les termes du second ordre

$$2\mathfrak{C}_1 = A_1 p^2 + 2B_1 s\theta \left[\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma' \right] + C_1 \left[\frac{R}{l}\cos\eta.\gamma s + \frac{c_1}{l}\gamma' \right]^2.$$

De cette formule, je tire

$$\frac{d\tilde{e}_1}{dp} = A_1 p,$$

$$\frac{d\tilde{e}_1}{d\gamma'} = B_1 s \theta \frac{c_1}{l} + C_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1 \right) \left[\frac{R}{l} \cos \tau_1 \cdot \gamma' s + \frac{c_1}{l} \gamma' \right],$$

puis

$$(\delta\theta) \quad \left(\frac{dT_1}{dp} \right)' = A_1 p',$$

$$(\delta\gamma) \quad \left(\frac{dT_1}{d\gamma'} \right)' = B_1 \frac{c_1}{l} p s + C_1 \frac{c_1}{l} \left[\frac{R}{l} \cos \tau_1 \cdot \gamma' s + \frac{c_1}{l} \gamma'' \right].$$

111. Termes $\left(\frac{dT}{d\theta} \right)'$ et $\left(\frac{dT}{d\gamma'} \right)'$ de la roue directrice. — La double force vive de cette roue est

$$2T_2 = A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2.$$

Le premier et le troisième terme étant du second ordre, il suffit de remplacer p_1 et r_1 par leurs valeurs principales (7) du n° 108 :

$$p_1 = p - \gamma' \sin \tau_1,$$

$$r_1 = n_1 = \frac{R}{l} \cos \tau_1 \cdot \gamma' s + \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1 \right) \gamma'.$$

Quant à q_1 , c'est un terme fini qui, d'après les formules (7) du même numéro, ne diffère de s que d'un infiniment petit du second ordre ε . La partie du second ordre de $B_1 q_1^2$ est donc $2B_1 s \varepsilon$. J'ai donc, pour remplacer $2T_2$, l'expression

$$2\tilde{C}_2 = A_1 p_1^2 + 2B_1 s \varepsilon + C_1 r_1^2.$$

J'en déduis

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{c}_2}{dp} &= A_1 p_1 \frac{dp_1}{dp} + B_1 s \frac{d\varepsilon}{dp} + C_1 r_1 \frac{dr_1}{dp} \\ &= A_1 p_1 + B_1 s \frac{d\varepsilon}{dp}, \\ \frac{d\tilde{c}_2}{d\gamma'} &= A_1 p_1 \frac{dp_1}{d\gamma'} + B_1 s \frac{d\varepsilon}{d\gamma'} + C_1 r_1 \frac{dr_1}{d\gamma'} \\ &= -A_1 p_1 \sin \tau_1 + B_1 s \frac{d\varepsilon}{d\gamma'} + C_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1 \right) r_1,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\Gamma_2}{dp} \right)' &= A_1 (p' - \gamma'' \sin \tau_1) + B_1 s \left(\frac{d\varepsilon}{dp} \right)', \\ \left(\frac{d\Gamma_2}{d\gamma'} \right)' &= -A_1 \sin \tau_1 (p' - \gamma'' \sin \tau_1) + B_1 s \left(\frac{d\varepsilon}{d\gamma'} \right)' \\ &\quad + C_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1 \right) \left[\frac{R}{l} \cos \tau_1 \gamma' s + \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1 \right) \gamma'' \right].\end{aligned}$$

Il reste à calculer les termes qui renferment $\varepsilon = q_1 - s$. On a pour cela la première et la quatrième des formules (7) du n° 108, lesquelles donnent

$$\varepsilon = -\alpha^2 s + n \frac{l\alpha - y}{R} - p\alpha - \gamma' \theta_1 \cos \tau_1 + n_1 \theta_1;$$

reste à remplacer n et n_1 par leurs valeurs (6) et (7) du n° 108]. J'obtiens

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dp} &= -\alpha = -\gamma \cos \tau_1, \\ \frac{d\varepsilon}{d\gamma'} &= \frac{l\alpha - y}{R} \frac{c_1}{l} - \theta_1 \cos \tau_1 + \theta_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1 \right) \\ &= \frac{c_1}{l} \frac{l \cos \tau_1 + c_1}{R} \gamma + \frac{c_1}{l} (\theta - \gamma \sin \tau_1) \quad [(2) \text{ et } (3), \text{ n}^\circ 108].\end{aligned}$$

J'obtiens, en définitive, les valeurs

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\varepsilon}{dp} \right)' &= -\gamma' \cos \tau_1, \\ \left(\frac{d\varepsilon}{d\gamma'} \right)' &= +p \frac{c_1}{l} + \frac{c_1}{l} \left(\frac{l \cos \tau_1 + c_1}{R} - \sin \tau_1 \right) \gamma',\end{aligned}$$

qu'il faut porter dans les expressions trouvées pour $\left(\frac{d\Gamma_2}{dp} \right)'$ et $\left(\frac{d\Gamma_2}{d\gamma'} \right)'$.

Celles-ci deviennent

$$\begin{aligned}
 (\partial\theta) \quad & \left(\frac{d\Gamma_2}{dp}\right)' = A_1(p' - \gamma'' \sin \tau_1) - B_1 s \gamma' \cos \tau_1, \\
 (\partial\gamma) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 \left(\frac{d\Gamma_2}{d\gamma'}\right)' &= -A_1 \sin \tau_1 (p' - \gamma'' \sin \tau_1) \\
 &+ B_1 s p \frac{c_1}{l} + B_1 \frac{c_1}{l} \left(\frac{l \cos \tau_1 + c_1}{R} - \sin \tau_1\right) \gamma' s \\
 &+ C_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1\right) \left[\frac{R}{l} \cos \tau_1 \gamma' s + \left(\frac{c_1}{l} + \cos \tau_1\right) \gamma''\right].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

112. Termes $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta}\right)'\right.$ et $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)'\right.$ du cadre monté.

— Le premier de ces deux termes a été trouvé au n° 85. Il suffit de le simplifier en conservant les termes du premier ordre seulement. Les formules (1) à (6) du n° 85 deviennent alors, en tenant compte des formules (1) à (6) du n° 103,

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & -\frac{d\eta}{d\theta} \sum m [j s' M'] = 0, \\
 (2) \quad & +\frac{d\nu}{d\theta} \sum m [K O' M'] = 0, \\
 (3) \quad & -\sum m [Y(M-O)M'] = -\mu R h s \left[\frac{R}{l} \cos \tau_1 \gamma' s + \frac{c_1}{l} \gamma'\right], \\
 (4) \quad & +\frac{d\eta}{d\theta} \sum m [j'(M-S)M'] = 0, \\
 (5) \quad & +\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)' \sum m [j(M-S)M'] = \frac{c_1}{l} \mu R (h-R) \gamma' s, \\
 (6) \quad & -\left(\frac{d\nu}{d\theta}\right)' \sum m [K(M-O)M'] = 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$(\partial\theta) \quad -\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta}\right)'\right. = -\mu R h \frac{R}{l} \cos \tau_1 \gamma' s^2 - \mu R^2 \frac{c_1}{l} \gamma' s.$$

Le terme $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)'\right.$ se déduit des formules (1) à (6) du n° 85 par la remarque du n° 91, savoir : on supprime le terme (3) et l'on rem-

place, dans les autres termes, $\frac{d}{d\theta}$ par $\frac{d}{d\gamma}$. J'obtiens, en retenant seulement les termes du premier ordre, toujours en appliquant les formules (1) à (6) du n° 108,

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & - \frac{d\eta}{d\gamma} \sum m [j S' M'] = 0, \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} + \frac{d\nu}{d\gamma} \sum m [K O' M'] &= + \mu R s \frac{c_1}{l} (en - hp) \\ &= \mu R \frac{c_1}{l} s \left(e \frac{R}{l} \cos \tau \cdot \gamma s + e \frac{c_1}{l} \gamma' - hp \right), \end{aligned} \right. \\
 (3) \quad & \text{néant,} \\
 (4) \quad & - \frac{d\eta}{d\gamma} \sum m [j' (M - S) M'] = 0, \\
 (5) \quad & + \left(\frac{d\eta}{d\gamma} \right)' \sum m [j (M - S) M'] = \frac{c_1}{l} \mu R (h - R) s (p - \gamma' \sin \tau), \\
 (6) \quad & - \left(\frac{d\nu}{d\gamma} \right)' \sum m [K (M - O) M'] = 0.
 \end{aligned}$$

La somme de ces termes est

$$(\hat{\sigma}\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right. &= \mu R \frac{c_1}{l} \left[- (h - R) \sin \tau + e \frac{c_1}{l} \right] s \gamma' \\ &- \mu R^2 \frac{c_1}{l} s p + \mu R e \frac{c_1}{l} \frac{R}{l} \cos \tau \cdot \gamma s^2. \end{aligned} \right.$$

115. Termes $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right.$ et $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right.$ de la roue motrice. — Le premier de ces deux termes est donné par la dernière formule du n° 81; le second se déduit de la même formule par la remarque du n° 91. Ils se réduisent, pour la partie du premier ordre, à

$$\begin{aligned}
 (\hat{\sigma}\theta) \quad & - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right. = -B_1 sn = -B_1 s \left(\frac{R}{l} \cos \tau \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \gamma' \right), \\
 (\hat{\sigma}\gamma) \quad & - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right. = -\frac{c_1}{l} \mu_1 R^2 p s.
 \end{aligned}$$

Il me faut maintenant faire le calcul pour la roue directrice.

114. Termes $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right.$ et $-\sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right.$ de la roue direc-

trice. — Le calcul du n° 81 [éq. (1) et conséquences subséquentes] a donné pour le terme de la roue motrice :

$$\text{Roue motrice} \dots \dots - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{dt} \right)' = \mu_1 [\Theta O' s'] - \Theta' \right| \partial \pi,$$

$\partial \pi$ désignant le moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point de contact O , et Θ la rotation virtuelle de la roue pour la vitesse $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 1$. Afin d'adapter ce résultat à la roue d'avant, j'emploie la notation adoptée plus haut et qui consiste à affecter de l'indice 1 les lettres relatives à la roue directrice. J'aurai, pour cette roue,

$$\begin{aligned} - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{dt} \right)' &= \mu_1 [\Theta_1 O'_1 S'_1] - \Theta'_1 \right| \partial \pi_1, \\ - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{dt} \right)' &= \mu_1 [\Gamma_1 O'_1 S'_1] - \Gamma'_1 \right| \partial \pi_1. \end{aligned}$$

Je dois calculer successivement ces quatre termes, en me limitant au premier ordre. J'ai d'abord, pour le point de contact O_1 et pour le centre $S_1 = O_1 + R k_1$, les vitesses

$$\begin{aligned} O'_1 &= R s_1 I_1, \\ S'_1 &= O'_1 + R(-p_1 j_1 + I_1 n_1 \sin \theta_1) \quad [(5), \text{n}^\circ 5], \end{aligned}$$

et il en résulte

$$\begin{aligned} \mu_1 [\Theta_1 O'_1 S'_1] &= - \mu_1 R^2 s_1 p_1 [\Theta_1 I_1 j_1], \\ \mu_1 [\Gamma_1 O'_1 S'_1] &= - \mu_1 R^2 s_1 p_1 [\Gamma_1 I_1 j_1]. \end{aligned}$$

Le multiplicateur des crochets des seconds membres étant du premier ordre, par la présence de p_1 , il convient de prendre les parties finies des crochets; par suite, les parties finies de Θ_1 et Γ_1 . Or d'après les résultats du n° 108, l'expression

$$(S\Theta) \quad \Theta_1 = I - j \frac{d\tau_1}{dt} + K \frac{d\nu}{dt} + j_1 \frac{d\sigma_1}{dt}$$

se réduit alors [(4) et (5), n° 108] à I . Il en résulte que $[\Theta_1 I_1 j_1]$ est infiniment petit et qu'on doit adopter

$$(1) \quad \mu_1 [\Theta_1 O'_1 S'_1] = 0.$$

Quant à la rotation due à la vitesse virtuelle $\frac{\delta\gamma}{\delta t} = 1$, savoir

$$\Gamma_1 = G - j \frac{d\eta}{d\gamma} + K \frac{d\nu}{d\gamma} + j \frac{d\tau_1}{d\gamma},$$

elle se réduit, d'après le n° 108 [éq. (4) et (5)], à

$$\Gamma_1 = G + K \frac{c_1}{l} = -I \sin \eta + k \cos \eta + K \frac{c_1}{l} \quad (\text{n° 47}).$$

La partie finie de $[\Gamma_1, I_1, j_1]$ se réduit ainsi à $\cos \eta + \frac{c_1}{l}$, de sorte que l'on doit adopter la formule

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \mu_1 [\Gamma_1, O'_1, S'_1] &= -\mu_1 R^2 s_1 p_1 \left(\cos \eta + \frac{c_1}{l} \right) \\ &= -\mu_1 R^2 \left(\cos \eta + \frac{c_1}{l} \right) (p - \gamma' \sin \eta) s. \quad [(7), \text{n° 108}]. \end{aligned} \right.$$

Je passe au calcul des deux termes restants $-\Theta'_1 | \mathfrak{M}_1$ et $-\Gamma'_1 | \mathfrak{M}_1$. Puisque Θ'_1 et Γ'_1 sont du premier ordre [(8), n° 108], il convient de limiter \mathfrak{M}_1 à sa partie finie. Or \mathfrak{M}_1 est le moment résultant des quantités de mouvement de la roue par rapport au point de contact. On sait qu'il est représenté par l'expression

$$\mathfrak{M}_1 = A_1 p_1 I_1 + B_1 q_1 j_1 + C_1 r_1 k_1,$$

qui n'a pour terme fini que $B_1 q_1 j_1 = B_1 s J$. Ce vecteur doit être multiplié séparément par les projections sur lui des vecteurs

$$\left. \begin{aligned} \Theta'_1 &= Jn = J \left(\frac{R}{l} \cos \eta \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \gamma' \right) \\ \Gamma'_1 &= J \left(-n \sin \eta - p \cos \eta + \frac{c_1}{l} \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \gamma' \right) \end{aligned} \right\} [(8), \text{n° 108}],$$

$$= J \left[-p \cos \eta - \frac{R}{l} \sin \eta \cos \eta \cdot \gamma s - \frac{c_1}{l} \left(\sin \eta - \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \right) \gamma' \right] \quad [(6), \text{n° 108}],$$

ce qui donne

$$(3) \quad -\Theta'_1 | \mathfrak{M}_1 = -B_1 s \left[\frac{R}{l} \cos \eta \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \gamma' \right],$$

$$(4) \quad -\Gamma'_1 | \mathfrak{M}_1 = +B_1 s \left[p \cos \eta + \frac{R}{l} \sin \eta \cos \eta \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \left(\sin \eta - \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \right) \gamma' \right].$$

En réunissant les résultats (1), (2), (3), (4) on obtient les formules cherchées

$$\begin{aligned}
 (\partial\theta) \quad & - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' = - B_1 s \left[\frac{R}{l} \cos \tau_1 \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \gamma' \right], \right. \\
 (\partial\gamma) \quad & \left. \begin{cases} - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' = - \mu_1 R^2 \left(\cos \tau_1 + \frac{c_1}{l} \right) (p - \gamma' \sin \tau_1) s \right. \\ \left. + B_1 s \left[p \cos \tau_1 + \frac{R}{l} \sin \tau_1 \cos \tau_1 \cdot \gamma s + \frac{c_1}{l} \left(\sin \tau_1 - \frac{l \cos \tau_1 + c_1}{R} \right) \gamma' \right]. \right. \end{cases} \right.
 \end{aligned}$$

115. Termes de la gravité. — Ces termes sont calculés dans les équations de l'équilibre, aux n^{os} 83 et 94. Nous avons à reproduire seulement les termes du premier ordre, savoir :

$$+ \sum m g \frac{dz}{d\theta} \text{ (n° 83).}$$

Cadre monté.....	$- \mu h g \theta + \mu e g \frac{d\eta}{d\theta} = - \mu g h \theta + \mu e g \frac{c_1}{l} \gamma$	[(4), n° 108]
Roue motrice...	$- \mu_1 R g \theta$	
Roue directrice..	$- \mu_1 R g \theta_1 = - \mu_1 R g (\theta - \gamma \sin \tau_1)$	[(2), n° 108]

$$+ \sum m g \frac{dz}{d\gamma} \text{ (n° 94).}$$

Cadre monté.....	$\mu e g \cos \theta \frac{d\eta}{d\theta} = + \mu e \frac{c_1}{l} g \theta - \mu e \frac{c_1}{l} \sin \tau_1 \cdot g \gamma$	[(4), n° 108]
Roue motrice....	»	
Roue directrice...	$- \mu_1 R g \sin \omega \sin \beta = + \mu_1 R \sin \tau_1 \cdot g \theta - \mu_1 R \sin^2 \tau_1 \cdot g \gamma$	[(1), (2), n° 108]

116. L'équation de chute et l'équation de guidon, dans un état infiniment voisin de la marche rectiligne. — Je reporte les termes $(\partial\theta)$ et $(\partial\gamma)$ trouvés aux n^{os} 109-113; je les dispose en tableaux, de façon à pouvoir en tirer facilement les formules que nous poursuivons et aussi à reconnaître l'origine des divers termes, ce qui est favorable aux vérifications. J'obtiens ainsi six tableaux; la somme des termes des trois premiers égale à zéro donne l'équation de chute, la somme relative aux trois derniers donne l'équation de guidon.

				$\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)'$				
109.	Cadre monté.....	+ A θ''	»	»	»			
110.	Roue motrice.....	+ A ₁ θ''	»	»	»			
111.	Roue directrice.....	+ A ₁ θ''	»	»	»			
				$-\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\theta}\right)' \right.$				
112.	Cadre monté.....	»	»	»	»			
113.	Roue motrice.....	»	»	»	»			
114.	Roue directrice.....	»	»	»	»			
				$+\sum m g \frac{dz}{d\theta}$				
115.	{ Cadre monté.....	»	»	»	- $\mu h g \theta$			
					Roue motrice.....	»	»	- $\mu_1 R g \theta$
					Roue directrice.....	»	»	- $\mu_1 R g \theta$
				$+\left(\frac{d\Gamma}{d\gamma'}\right)'$				
109.	Cadre monté.....	- L $\frac{c_1}{l} \theta''$	+ $\mu R^2 \frac{c_1}{l} s \theta'$	»	»			
110.	Roue motrice.....	»	+ B ₁ $\frac{c_1}{l} s \theta'$	»	»			
111.	Roue directrice.....	- A ₁ $\sin \gamma_1 \theta''$	+ B ₁ $\frac{c_1}{l} s \theta'$	»	»			
				$-\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)' \right.$				
112.	Cadre monté.....	»	- $\mu R^2 \frac{c_1}{l} s \theta'$	»	»			
113.	Roue motrice.....	»	- $\mu_1 R^2 \frac{c_1}{l} s \theta'$	»	»			
114.	Roue directrice.....	»	$\left[-\mu_1 R^2 \left(\cos \gamma_1 + \frac{c_1}{l} \right) + B_1 \cos \gamma_1 \right] s \theta'$	»	»			
				$+\sum m g \frac{dz}{d\gamma}$				
115.	{ Cadre monté.....	»	»	»	+ $\mu e \frac{c_1}{l} g \theta$			
					Roue motrice.....	»	»	»
					Roue directrice.....	»	»	+ $\mu_1 R \sin \gamma$
				θ''	θ			

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d\Gamma}{d\theta} \right)' \\
 L \frac{c_1}{l} \gamma'' & - \left[\mu R (h - R) \frac{c_1}{l} + L \frac{R}{l} \cos \eta \right] s \gamma' & \text{»} \\
 \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
 A_1 \sin \eta \gamma'' & - B_1 \cos \eta \cdot s \gamma' & \text{»} \\
 & - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right. \\
 \text{»} & - \mu R^2 \frac{c_1}{l} s \gamma' & - \mu R h \frac{R}{l} \cos \eta \cdot s^2 \gamma \\
 \text{»} & - B_1 \frac{c_1}{l} s \gamma' & - B_1 \frac{R}{l} \cos \eta \cdot s^2 \gamma \\
 \text{»} & - B_1 \frac{c_1}{l} s \gamma' & - B_1 \frac{R}{l} \cos \eta \cdot s^2 \gamma \\
 & + \sum m g \frac{dz}{d\theta} \\
 \text{»} & \text{»} & + \mu e \frac{c_1}{l} g \gamma \\
 \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
 \text{»} & \text{»} & + \mu_1 R \sin \eta \cdot g \gamma \\
 & + \left(\frac{d\Gamma}{d\gamma'} \right)' \\
 - C \frac{c_1^2}{l^2} \gamma'' & + \left[\mu R (h - R) \frac{c_1}{l} \sin \eta + C \frac{c_1}{l} \frac{R}{l} \cos \eta \right] s \gamma' & \text{»} \\
 - C_1 \frac{c_1^2}{l^2} \gamma'' & + C_1 \frac{R}{l} \frac{c_1}{l} \cos \eta \cdot s \gamma' & \text{»} \\
 - \left[A_1 \sin^2 \eta + C_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \eta \right)^2 \right] \gamma'' & + \left[B_1 \frac{c_1}{l} \left(\frac{l \cos \eta + c_1}{R} - \sin \eta \right) + C_1 \frac{R}{l} \cos \eta \left(\frac{c_1}{l} + \cos \eta \right) \right] s \gamma' & \text{»} \\
 & - \sum m M' \left| \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right. \\
 \text{»} & + \mu R \frac{c_1}{l} \left[- (h - R) \sin \eta + e \frac{c_1}{l} \right] s \gamma' & + \mu R e \frac{c_1}{l} \frac{R}{l} \cos \eta \cdot s^2 \gamma \\
 \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
 \text{»} & + \left[\mu_1 R^2 \left(\cos \eta + \frac{c_1}{l} \right) \sin \eta + B_1 \frac{c_1}{l} \left(\sin \eta - \frac{l \cos \eta + c_1}{R} \right) \right] s \gamma' & + B_1 \frac{R}{l} \sin \eta \cos \eta \cdot s^2 \gamma \\
 & + \sum m g \frac{dz}{d\gamma'} \\
 \text{»} & \text{»} & - \mu e \frac{c_1}{l} \sin \eta \cdot g \gamma \\
 \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
 \text{»} & \text{»} & - \mu_1 R \sin^2 \eta \cdot g \gamma \\
 \gamma'' & \gamma' & \gamma
 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème de la stabilité en marche rectiligne.

§ V. — STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE SANS LES MAINS,
EN MARCHÉ RECTILIGNE.

117. *Calcul numérique des coefficients des deux équations du mouvement dans un état infiniment voisin de la marche rectiligne.* — Les équations de chute et de guidon dont les termes se calculent à l'aide du tableau des pages 170-171 sont de la forme

$$\begin{aligned} (\delta\theta) \quad & \mathfrak{a}''\theta'' + \mathfrak{a}'\theta' + \mathfrak{a}\theta + \mathfrak{b}''\gamma'' + \mathfrak{b}'\gamma' + \mathfrak{b}\gamma = 0, \\ (\delta\gamma) \quad & \mathfrak{a}_1''\theta'' + \mathfrak{a}_1'\theta' + \mathfrak{a}_1\theta + \mathfrak{b}_1''\gamma'' + \mathfrak{b}_1'\gamma' + \mathfrak{b}_1\gamma = 0. \end{aligned}$$

Voici le tableau des valeurs numériques que j'adopte comme constantes caractéristiques de la bicyclette envisagée :

R.	l.	$c_1 = c.$	$r_1.$	e.	h.	$\mu.$	$\mu_1.$	$A + 2A_1.$	C.	L.
0,38	1,10	0,08	25 ⁿ	0,20	1	70	5	100	4	14

Les unités sont le mètre et le kilogramme-masse. La constante $\mu_1 = 5^{\text{kg}}$ pourra paraître un peu forte; le poids des roues munies de pneumatiques est aujourd'hui bien moindre; mais je l'ai déjà dit au n° 32, il s'agit d'un modèle déjà ancien et muni de caoutchoucs creux. Les constantes géométriques ont été mesurées sur la bicyclette même. Je n'insisterai pas sur le choix des constantes $A + 2A_1$, C et L; je les ai calculées en tenant compte du cadre et en assimilant le cavalier à des formes géométriques simples. C'est un procédé un peu grossier, mais qui semble bien suffisant pour la question qui nous occupe, les constantes variant assez fort d'un cavalier à l'autre. Avec ces constantes, et à l'aide du tableau du n° 116,

on trouve, pour l'équation de chute ($\delta\theta$) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'' &= +A + 2A_1 && = +100, \\ \mathfrak{A}' &= 0, && = 0, \\ \mathfrak{A} &= -g(\mu h + 2\mu_1 R) && = -724 \\ \mathfrak{B}'' &= -\left(L \frac{c_1}{l} + A_1 \sin \eta\right) && = -1,476, \\ \mathfrak{B}' &= -s \left[\frac{c_1}{l} (\mu R h + 2B_1) + \cos \eta \left(L \frac{R}{l} + B_1 \right) \right] && = -7,83 \times s, \\ \mathfrak{B} &= -s^2 \frac{R}{l} \cos \eta (\mu R h + 2B_1) + g \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta \right) && = -9,21 \times s^2 + 17,85; \end{aligned}$$

puis, pour l'équation de guidon ($\delta\gamma$),

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1'' &= -\left(L \frac{c_1}{l} + A_1 \sin \eta\right) && = -1,48, \\ \mathfrak{A}_1' &= +s(B_1 - \mu_1 R^2) \left(2 \frac{c_1}{l} + \cos \eta \right) = s \mu_1 R^2 \left(2 \frac{c_1}{l} + \cos \eta \right) \quad [(7), \text{n}^\circ 4] && = +0,757 \times s, \\ \mathfrak{A}_1 &= +g \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta \right) && = +17,85, \\ \mathfrak{B}_1'' &= (C + C_1) \left(\frac{c_1}{l} \right)^2 + C_1 \left(\frac{c_1}{l} + \cos \eta \right)^2 + A_1 \sin^2 \eta && = +0,56, \\ \mathfrak{B}_1' &= +s \left[\frac{R c_1}{l} \cos \eta (C + 2C_1) + C_1 \frac{R}{l} \cos^2 \eta + \mu R e \left(\frac{c_1}{l} \right)^2 + \mu_1 R^2 \sin \eta \left(\cos \eta + \frac{c_1}{l} \right) \right] && = +0,535 \times s, \\ \mathfrak{B}_1 &= +s^2 \frac{R}{l} \cos \eta \left(\mu R e \frac{c_1}{l} + B_1 \sin \eta \right) - g \sin \eta \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta \right) && = +0,312 \times s^2 - 7,54. \end{aligned}$$

118. *Changement de variable indépendante.* — La façon dont la vitesse de marche s entre dans ces coefficients des équations du mouvement rend avantageux le changement de variable qui consiste à prendre pour variable indépendante non plus le temps t , mais le multiple du temps

$$(1) \quad T = st.$$

De cette relation (1) on déduit la formule symbolique

$$(2) \quad \frac{d}{dt} = s \frac{d}{dT}.$$

Les deux équations du mouvement deviennent, avec cette nouvelle variable, et en divisant tous les termes par s^2 ,

$$(\delta\theta) \quad \left(\mathfrak{c}b'' \frac{d^2}{dT^2} + \frac{\mathfrak{c}b'}{s} \frac{d}{dT} + \frac{\mathfrak{c}b_0}{s^2} \right) \theta + \left(\mathfrak{w}b'' \frac{d^2}{dT^2} + \frac{\mathfrak{w}b'}{s} \frac{d}{dT} + \frac{\mathfrak{w}b_0}{s^2} \right) \gamma = 0,$$

$$(\delta\gamma) \quad \left(\mathfrak{c}b_1'' \frac{d^2}{dT^2} + \frac{\mathfrak{c}b_1'}{s} \frac{d}{dT} + \frac{\mathfrak{c}b_1}{s^2} \right) \theta + \left(\mathfrak{w}b_1'' \frac{d^2}{dT^2} + \frac{\mathfrak{w}b_1'}{s} \frac{d}{dT} + \frac{\mathfrak{w}b_1}{s^2} \right) \gamma = 0.$$

Je désigne les nouveaux coefficients de ces équations par les petites lettres, qui correspondent aux grandes lettres; ainsi, par exemple, $a'_1 = \frac{\mathfrak{c}b_1'}{s}$; j'aurai, en définitive, pour les équations du mouvement,

$$(\delta\theta) \quad \left(a'' \frac{d^2}{dT^2} + a' \frac{d}{dT} + a \right) \theta + \left(b'' \frac{d^2}{dT^2} + b' \frac{d}{dT} + b \right) \gamma = 0,$$

$$(\delta\gamma) \quad \left(a_1'' \frac{d^2}{dT^2} + a_1' \frac{d}{dT} + a_1 \right) \theta + \left(b_1'' \frac{d^2}{dT^2} + b_1' \frac{d}{dT} + b_1 \right) \gamma = 0,$$

et les coefficients ont pour valeurs numériques unités et données du n° 117 :

$$\begin{array}{ll} a'' = + 100, & a_1'' = - 1,48, \\ a' = 0, & a_1' = + 0,757, \\ a = - 724 : s^2, & a_1 = + 17,85 : s^2, \\ b'' = - 1,476, & b_1'' = + 0,56, \\ b' = - 7,83, & b_1' = + 0,535, \\ b = - 9,21 + 17,85 : s^2, & b_1 = + 0,312 - 7,54 : s^2. \end{array}$$

119. *Intégration des équations du mouvement du n° 118.* — Une solution particulière des équations $\delta\theta$ et $\delta\gamma$ (n° 118) est de la forme

$$\theta = A e^{\lambda T}, \quad \gamma = B e^{\lambda T}.$$

Le coefficient λ et le rapport $\frac{A}{B}$ sont déterminés par les équations obtenues en portant ces valeurs de θ et γ dans les équations du mouvement, savoir

$$(a''\lambda^2 + a'\lambda + a)A + (b''\lambda^2 + b'\lambda + b)B = 0,$$

$$(a_1''\lambda^2 + a_1'\lambda + a_1)A + (b_1''\lambda^2 + b_1'\lambda + b_1)B = 0.$$

Le résultat de l'élimination de A et B est l'équation caractéristique de stabilité

$$(\ominus) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = (a''b_1'' - a_1''b'')\lambda^4 + (a''b_1' - a_1''b'' + a'b_1'' - a_1'b'')\lambda^3 \\ \quad + (a''b_1 - a_1''b + a'b_1' - a_1'b' + ab_1'' - a_1'b'')\lambda^2 \\ \quad + (a'b_1 - a_1'b + ab_1' - a_1'b')\lambda + ab_1 - a_1b. \end{array} \right.$$

Si λ est une racine de cette équation, on aura une solution en prenant

$$A = C(b''\lambda^2 + b'\lambda + b), \quad B = -C(a''\lambda^2 + a'\lambda + a).$$

Pour abrégér, je désignerai par \mathfrak{b} et par \mathfrak{b} ces deux trinomes en λ . La solution générale sera ainsi, en appelant $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les quatre racines de l'équation caractéristique,

$$\begin{aligned} +\theta &= +C_1\mathfrak{b}_1e^{\lambda_1\tau} + C_2\mathfrak{b}_2e^{\lambda_2\tau} + C_3\mathfrak{b}_3e^{\lambda_3\tau} + C_4\mathfrak{b}_4e^{\lambda_4\tau}, \\ -\gamma &= +C_1\mathfrak{b}_1e^{\lambda_1\tau} + C_2\mathfrak{b}_2e^{\lambda_2\tau} + C_3\mathfrak{b}_3e^{\lambda_3\tau} + C_4\mathfrak{b}_4e^{\lambda_4\tau}. \end{aligned}$$

Il resterait à faire la résolution de l'équation caractéristique (\ominus) . Malheureusement, elle contient un paramètre : la vitesse de marche s ; on ne peut donc que la résoudre dans des cas particuliers. Nous allons cependant la discuter de façon à en tirer toutes les conséquences relatives à la stabilité.

120. *Étude de l'équation caractéristique (\ominus) .* — Dans l'équation du n° 119, on porte les valeurs trouvées au n° 118 pour les coefficients a et b . Tout calcul fait, on trouve, après avoir divisé les deux membres par le coefficient de λ^4 unités et données du n° 117,

$$(\ominus) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda^4 + 0,80\lambda^3 + \left(0,437 - \frac{20,54}{s^2}\right)\lambda^2 \\ \quad + \left(0,1295 - \frac{4,83}{s^2}\right)\lambda - \frac{1,143}{s^2} + \frac{95,6}{s^4} = 0. \end{array} \right.$$

Les trois derniers termes de cette équation sont annulés respectivement

c.

par les valeurs de s^2 que voici :

$$\frac{20,54}{0,437} = 47,0, \quad \frac{4,83}{0,1295} = 37,05, \quad \frac{95,6}{1,143} = 83,6.$$

Il en résulte que les signes des termes de l'équation (\ominus) sont marqués par le Tableau suivant :

	λ^4	λ^3	λ^2	λ	λ^0
0 < s^2 < 37,05.....	+	+	-	-	+
37,05 < s^2 < 47,0.....	+	+	-	+	+
47,0 < s^2 < 83,6.....	+	+	+	+	+
83,6 < s^2 < $+\infty$	+	+	+	+	-

Sur la réalité des racines d'une équation du quatrième degré, on peut faire trois hypothèses, suivant qu'il y a zéro, un ou deux couples imaginaires. Il est facile de vérifier que, dans les trois cas, si les racines réelles et les parties réelles des racines imaginaires sont négatives, l'équation ne peut présenter que des permanences ⁽¹⁾. C'est là un caractère nécessaire de stabilité; ainsi, il ne peut y avoir stabilité proprement dite que dans le troisième cas du Tableau ci-dessus, c'est-à-dire pour

$$47,0 < s^2 < 83,6.$$

Le cas de la limite supérieure $s^2 = 83,6$ est intéressant, parce que le terme constant est alors nul; l'équation se réduit alors à l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 + 0,80\lambda^2 + 0,191\lambda + 0,0717 = 0.$$

J'ai résolu cette équation par la méthode que j'ai exposée plus haut (n° 14) et j'ai obtenu ⁽²⁾

1° La racine réelle.....	$\lambda = -0,6744$
2° Le couple imaginaire.....	$\lambda^2 + 0,1256\lambda + 0,1062 = 0$

⁽¹⁾ Il suffit de considérer les relations entre les coefficients et les racines.

⁽²⁾ Le lecteur vérifiera facilement ce résultat en effectuant la division du premier membre de l'équation à résoudre par $\lambda - 0,6744$.

La racine réelle est négative; le couple imaginaire ayant pour somme $-0,1256$ a sa partie réelle négative aussi; on peut donc affirmer que le cas étudié $s^2 = 83,6$ est un cas où le mouvement rectiligne, sans les mains, est stable. La vitesse, en unités ordinaires (kilomètres-heure), est

$$V = \frac{sR}{1000} \times 3600 = \sqrt{83,6} \times 0,38 \times 36,00 = 12^{\text{km}},5 \text{ à l'heure.}$$

Quant à la limite inférieure $s^2 = 47,0$, elle ne donne certainement pas la stabilité. En effet, elle annule le coefficient de λ^2 qui est la somme des produits deux à deux des racines de l'équation caractéristique. On a donc, dans ce cas, entre les quatre racines, la relation

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) = 0.$$

Si les quatre racines sont réelles et négatives, les trois termes du premier membre sont positifs. S'il y a un couple imaginaire et un négatif ou deux couples imaginaires, je peux supposer que les racines sont groupées par couples (λ_1, λ_2) et (λ_3, λ_4) ; si les parties réelles des racines imaginaires sont négatives ou nulles, on peut affirmer que les deux premiers termes de la dernière formule sont positifs; le troisième terme pourra être positif ou nul. Il est donc impossible que le coefficient de λ^2 soit nul dans un cas de stabilité. Ainsi, la stabilité est limitée à deux valeurs de s^2 ; la plus grande est $83,6$; la plus petite est encore inconnue, mais certainement supérieure à $47,0$. Nous allons la chercher et trouver qu'elle est égale à $67,3$.

421. Recherche de la limite inférieure des valeurs de s^2 stables. — Pour $s^2 = 83,6$, les quatre racines de l'équation caractéristique sont (n° 420).

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0,6744, \quad \left. \begin{array}{l} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{array} \right\} \lambda^2 + 0,1256\lambda + 0,1062 = 0.$$

Pour la valeur $s^2 = 83,6 - \varepsilon$, inférieur à $83,6$ d'une quantité infiniment petite ε , la racine λ_2 et le couple (λ_3, λ_4) auront des valeurs infiniment voisines des précédentes; la règle des signes de Descartes montre que la

racine λ_1 deviendra négative. Quand s^2 décroît de $83,6 - \varepsilon$ à $47,0$, aucune racine ne s'annule; donc λ_1 et λ_2 demeurent négatives. Ainsi, l'obstacle à la stabilité ne peut venir que du couple imaginaire, et l'on peut affirmer qu'il existe entre $83,6$ et $47,0$ une valeur de s^2 pour laquelle la partie réelle du couple imaginaire cesse d'être négative pour devenir positive. C'est cette valeur qu'il nous faut trouver. Elle est définie par la condition que le couple (λ_2, λ_3) prenne la forme d'une imaginaire pure $\pm \mu i$. Je suis ainsi conduit à chercher la condition pour qu'une équation du quatrième degré à coefficients réels,

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,$$

ait une racine de la forme μi .

Je remplace λ par μi dans l'équation; puis j'égale à zéro la partie réelle et la partie imaginaire; j'obtiens

$$(1) \quad \mu^4 - a_2 \mu^2 + a_4 = 0,$$

$$(2) \quad \mu i (-a_1 \mu^2 + a_3) = 0.$$

Le couple imaginaire est donné par la valeur de μ^2 tirée de la deuxième équation, savoir

$$(3) \quad \mu^2 = \frac{a_3}{a_1}.$$

Je porte la valeur de μ^2 dans la première équation et j'ai la condition cherchée

$$\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 - a_2 \frac{a_3}{a_1} + a_4 = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(4) \quad a_3^2 - a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4 = 0.$$

Les formules (3) et (4), appliquées à notre équation caractéristique,

donnent

$$\mu^2 = \left(0,1295 - \frac{4,83}{s^2}\right) : 80,$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \left(0,1295 - \frac{4,83}{s^2}\right)^2 - 0,80 \left(0,437 - \frac{20,54}{s^2}\right) \left(0,1295 - \frac{4,83}{s^2}\right) \\ &+ 0,80^2 \left(-\frac{1,143}{s^2} + \frac{95,6}{s^4}\right). \end{aligned} \right.$$

Je chasse les dénominateurs, j'ordonne par rapport à s^2 et j'obtiens, tous calculs faits, l'équation

$$(6) \quad s^4 - 64,6s^2 - 179,1 = 0.$$

Elle a pour racine positive en s^2

$$s^2 = 67,3 \text{ (unités du n° 117),}$$

comme je l'ai annoncé au n° 120. Cette valeur correspond à une vitesse de 10^{km} à l'heure.

On voit en résumé que la stabilité de la marche sans les mains exige que la vitesse soit comprise entre 10^{km} et 12^{km},5 à l'heure, dans l'exemple numérique que nous avons choisi.

122. *Influence des constantes de la bicyclette sur les limites imposées à la vitesse par la condition de stabilité.* — La limite supérieure de s^2 a été obtenue au n° 120 en égalant à zéro le terme indépendant de λ dans l'équation caractéristique (\ominus), lequel terme est $ab_1 - a_1b$ [(\ominus), n° 119]. Or, les constantes a, a_1, b, b_1 ne diffèrent des constantes $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1$ du n° 117 que par le facteur s^2 . Ainsi, l'équation qui définit la limite supérieure de s^2 est

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 = 0,$$

où je dois remplacer les lettres par leurs expressions du n° 117,

savoir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -g(\mu h + 2\mu_1 R), & \mathfrak{A}_1 &= +g\left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right), \\ \mathfrak{B} &= -s^2 \frac{R}{l} \cos \eta (\mu R h + 2B_1) & \mathfrak{B}_1 &= s^2 \frac{R}{l} \cos \eta \left(\mu R e \frac{c_1}{l} + B_1 \sin \eta\right) \\ &+ g\left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right), & & -g \sin \eta \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right). \end{aligned}$$

J'obtiens

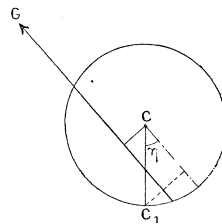
$$\left. \begin{aligned} & -g(\mu h + 2\mu_1 R) \frac{R}{l} \cos \eta \left(\mu R e \frac{c_1}{l} + B_1 \sin \eta\right) \\ & + g\left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right) \frac{R}{l} \cos \eta (\mu R h + 2B_1) \Big\} s^2 \\ & + (\mu h + 2\mu_1 R) \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right) g^2 \sin \eta - g^2 \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right)^2 \end{aligned} \right| = 0,$$

puis, en remplaçant B_1 par $2\mu_1 R^2$ (n° 4)

$$s^2 = \frac{g\left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right) \left\{ \mu h \sin \eta + \mu_1 R \sin \eta - \mu e \frac{c_1}{l} \right\}}{R \frac{R}{l} \cos \eta \left\{ (\mu h + 2\mu_1 R) \left(\mu e \frac{c_1}{l} + 2\mu_1 R \sin \eta\right) - (\mu h + 4\mu_1 R) \left(\mu e \frac{c_1}{l} + \mu_1 R \sin \eta\right) \right\}}.$$

On simplifiera la question en admettant une condition qui semble obser-

Fig. 15^e.



vée par les constructeurs, savoir que la ligne du guidon passe au milieu du rayon de contact. Cette condition donne la relation (fig. 15^e)

$$c_1 = c = \frac{R \sin \eta}{2};$$

si je porte cette valeur de c_1 dans l'expression de s^2 , $R \sin \eta$ devient en facteur aux deux termes. Ce facteur supprimé, la valeur de s^2 se réduit à

$$s^2 = \frac{g \sin \eta}{R \frac{R}{l} \cos \eta} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \frac{\mu}{l} e + \mu_1\right) \left(\mu h + \mu_1 R - \frac{1}{2} \frac{\mu}{l} e R\right)}{\left(\mu h + 2 \mu_1 R\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\mu}{l} e + 2 \mu_1\right) - \left(\mu h + 4 \mu_1 R\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\mu}{l} e + \mu_1\right)}$$

Le dénominateur de la deuxième fraction se réduit à $\mu \mu_1 \left(h - R \frac{e}{l}\right)$, de sorte que s^2 prend la forme

$$s^2 = \frac{g \sin \eta}{R \frac{R}{l} \cos \eta} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{e}{l} + 1\right) \cdot \frac{h - \frac{1}{2} R \frac{e}{l} + \frac{\mu_1}{\mu} R}{h - R \frac{e}{l}}$$

La valeur de s^2 se présente ainsi sous la forme d'un produit de trois facteurs. Les écarts d'évaluation des constantes ont une faible importance pour les deux facteurs extrêmes; ils prennent au contraire une influence considérable sur le second facteur. La formule met en évidence un double fait :

Pour augmenter la limite supérieure de la vitesse, il convient de

- 1° Diminuer la masse de la roue μ_1 ;
- 2° Augmenter la distance e du cavalier à l'axe de la roue d'arrière.

Voici deux systèmes d'évaluation relatifs, le premier à la bicyclette ancienne à laquelle j'ai emprunté les évaluations antérieures (n° 117), le second à une bicyclette de construction récente :

Bicyclette ancienne.	Bicyclette nouvelle.
$e = 0,20, \quad \frac{1}{2} \mu = 3,5,$	$e = 0,35, \quad \frac{1}{2} \mu = 3,2,$
$l = 1,10, \quad \mu_1 = 5,$	$l = 1,15, \quad \mu_1 = 3,5,$
$\frac{e}{l} = 0,182, \quad \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} = 7,$	$\frac{e}{l} = 0,305, \quad \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} = 9,13,$
$\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{e}{l} = 1,27,$	$\frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{e}{l} = 2,8,$
$1 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{e}{l} = 2,27,$	$1 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_1} \frac{e}{l} = 3,8,$

Les rapports des deux évaluations de s^2 et de s sont

$$\frac{s'^2}{s^2} = \frac{3,8}{2,27} = 1,67, \quad \frac{s'}{s} = 1,29.$$

Si l'on se rappelle que la limite de s^2 trouvée antérieurement était $12^{\text{km}},5$ à l'heure (n° 120), on voit que la nouvelle limite sera

$$12,5 \times 1,29 = 16^{\text{km}},2 \text{ à l'heure.}$$

Quant à la limite inférieure imposée aux vitesses par la condition de stabilité, elle a été donnée par l'équation numérique (6) du n° 121 ou, ce qui revient au même, par l'équation littérale (4) du même numéro, savoir :

$$a_3^2 - a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4 = 0.$$

Cette équation fait intervenir tous les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 de l'équation caractéristique. Ceux-ci sont des fonctions compliquées des 6 coefficients \mathfrak{A} et \mathfrak{B} des équations du mouvement (n° 117). A leur tour, les 6 coefficients \mathfrak{A} et \mathfrak{B} sont des fonctions compliquées des constantes de la bicyclette, de sorte qu'il est difficile de dégager l'influence des constantes caractéristiques sur la limite inférieure des vitesses qui permettent la stabilité. Cependant, la question ne présente pas d'autre difficulté que la longueur des écritures et la complication des formules.

125. *Influence des frottements sur la stabilité.* — Considérons d'abord le pendule simple OM dans le cas des petites oscillations (*fig.* 15'). Son équation est

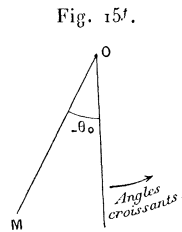
$$\theta'' + a^2 \theta = 0,$$

dont l'intégrale se met sous la forme

$$\theta = \theta_0 \sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right),$$

quand on prend pour origine du temps l'époque où l'élongation négative est maximum et égale à $-\theta_0$.

Je vais examiner comment le frottement va modifier la loi des oscillations. Quand deux corps solides frottent l'un contre l'autre, on admet en général que le frottement est proportionnel à leur pression normale et de sens contraire à la vitesse. Ici, la pression est en réalité variable à cause de



la force centrifuge; mais rien n'empêche d'imaginer une liaison, une sorte de fil élastique reliant le point M au point O, qui supporterait une partie de la pression que le point M tend à exercer sur la surface de la sphère supposée décrite par le point M.

Ainsi, je suppose une force de frottement opposée à la vitesse et de grandeur constante $a^2 k$. Dans la première période du mouvement, l'équation sera désormais

$$\theta'' = - a^2 \theta - a^2 k.$$

L'intégrale sera maintenant

$$\theta = - k + (\theta_0 - k) \sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mais cette formule n'est valable qu'autant qu'elle donne pour la vitesse θ' une valeur positive

$$\theta' = (\theta_0 - k) a \cos\left(at - \frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

Une première conséquence est celle-ci : pour que la formule soit valable, il faut que $\theta_0 - k$ soit positif, car autrement, dès les premiers instants, θ' serait négatif; le pendule ne pourrait pas *démarrer*.

La condition $\theta_0 > k$ supposée, θ' sera positif jusqu'à $t = \frac{\pi}{a}$ (soit la valeur

d'une demi-période oscillatoire). A cette époque, on aura

$$\theta' = 0, \quad \theta = -k + \theta_0 - k = \theta_0 - 2k.$$

A partir de là, le même raisonnement peut être appliqué de nouveau, puisqu'on part du repos, avec une élongation donnée $\theta_0 - 2k$. D'ailleurs, deux cas pourront se présenter suivant que $\theta_0 - 2k$ sera positif ou négatif; dans le premier cas, le pendule dépasse la verticale; dans le second cas, il ne l'atteint pas. On voit en résumé que les amplitudes décroissent en progression arithmétique, les élongations ayant pour valeurs θ_0 , $\theta_0 - 2k$, $\theta_0 - 4k$, . . . , et que le pendule s'arrêtera lorsque l'élongation $\theta_0 - 2nk$ sera, en valeur absolue, inférieure à k .

On peut dire que, dans le cas étudié, le frottement a augmenté l'effet de stabilité; et cette conséquence subsiste évidemment dans le cas des oscillations amorties.

Je suppose maintenant que le mouvement étudié, au lieu d'être pendulaire, consiste dans une *oscillation faiblement croissante*, quand on néglige le frottement

$$\theta = \theta_0 e^{\varepsilon t} \sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right).$$

L'équation différentielle du mouvement est (quand on néglige ε^2)

$$\theta'' - 2\varepsilon\theta' + a^2\theta = 0.$$

Si maintenant j'introduis, comme tout à l'heure, une force de frottement égale à $-a^2k$ dans la première période, j'obtiens l'équation

$$\theta'' - 2\varepsilon\theta' + a^2(\theta + k) = 0$$

dont l'intégrale est

$$\theta = -k + (\theta_0 - k)e^{\varepsilon t} \sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right).$$

Comme plus haut, le démarrage ne se produit que si $\theta_0 > k$. Puis la formule cesse d'être applicable pour $t = \frac{\pi}{a} = \frac{1}{2}$ période $= \frac{T}{2}$, et l'élongation

est alors

$$\theta_1 = -k + (\theta_0 - k)e^{\frac{\varepsilon T}{2}}.$$

Or $e^{\frac{\varepsilon T}{2}}$ surpasse 1 d'une quantité τ ; je peux ainsi écrire

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -k + (\theta_0 - k)(1 + \tau) \\ &= \theta_0 + \tau\theta_0 - (2 + \tau)k.\end{aligned}$$

Pourvu que $\tau\theta_0$ soit inférieur à $(2 + \tau)k$, on voit que l'effet du frottement sera d'amortir les oscillations et de rendre stable l'équilibre qui était d'abord instable.

Le raisonnement cesse d'être applicable si l'intégrale du mouvement (en l'absence du frottement constant) est

$$\theta = \theta_0 e^{at},$$

parce qu'aucun changement de signe ne peut se produire dans la vitesse. Cependant on peut dire que la stabilité est encore augmentée par le frottement. En effet, l'intégrale devient, dans ce cas du frottement,

$$\theta = +k + (\theta_0 - k)e^{at},$$

et si $\theta_0 < k$, le démarrage ne peut pas se produire. De plus, s'il se produit, le mouvement est plus lent, puisque sa vitesse est

$$\theta' = a(\theta_0 - k)e^{at}$$

au lieu de

$$\theta' = \theta_0 e^{at}.$$

Ces exemples suffisent pour mettre en lumière une méthode générale qui pourra être suivie quand le frottement donnera dans les équations du mouvement une constante de signe contraire à la vitesse d'une des coordonnées du système. Il y aurait lieu de l'appliquer au cas de la bicyclette; car la vitesse de rotation γ' du guidon est ralentie d'une quantité certai-

nement sensible par le frottement de pivotement de la roue directrice sur le sol (1). Il est certain qu'on étendrait ainsi le champ de stabilité obtenu pour la bicyclette aux n^{os} 120-125.

CONCLUSIONS ET RÉSULTATS.

124. J'ai étudié d'une façon approfondie le cerceau et le monocycle, puis indiqué le principe d'un monocycle stable.

Le problème de la bicyclette, plus difficile, ne permet pas une discussion aussi complète. Cependant, j'ai pu, sans négliger les complications inhérentes au guidon et à la roue directrice, trouver les équations complètes de l'équilibre dans les deux cas : qu'on tienne le guidon ou qu'on l'abandonne à lui-même. J'ai pu traiter aussi d'une façon complète la question de la stabilité, dans les deux cas ; cependant, pour le deuxième cas, je me suis borné à étudier la stabilité dans la marche rectiligne dont on ne peut guère s'écarter pratiquement. La question de dérapage a été étudiée dans le monocycle ; il suffit d'appliquer les résultats à la bicyclette sans qu'il soit nécessaire de faire une étude nouvelle et rigoureuse pour une question où les données sont si variables avec l'état du terrain.

Deux questions indiquées par l'Académie semblent avoir été négligées dans ce Mémoire : c'est le grand bicycle d'une part, puis le mouvement sur un plan incliné. Pour le problème du grand bicycle, il ne diffère pas essentiellement de celui de la bicyclette : relativement à la propulsion, c'est la roue directrice qui est aussi motrice ; pour l'équilibre avec les mains, nos calculs s'appliquent avec des changements de données numériques seulement ; enfin, la question de l'équilibre sans les mains ne se pose pas, puisque, quand les mains cessent de tenir le guidon, les pieds continuent d'agir sur l'orientation de la roue directrice. L'étude du grand bicycle (qui d'ailleurs est abandonné) rentre, on le voit, dans celle de la bicyclette.

Quant à l'étude du mouvement sur un sol incliné, il me suffira d'en dire

(1) Frottement de pivotement étudié par M. Léauté.

quelques mots. La mise en équation se fera de la même manière, en conservant le trièdre coordonné IJK du cycle par rapport au plan incliné. Les travaux des forces d'inertie ne sont pas changés. Il en est autrement du travail de la pesanteur, parce que la normale au sol K ne coïncide plus avec la verticale K'.

Si, par exemple, on envisage le cas du monocycle, on trouve, pour les travaux virtuels de la pesanteur dans les trois équations,

$$\begin{aligned} \text{Équation de chute} \dots\dots (\partial\theta) & \mu gh(\cos i \sin \theta - \sin i \cos \theta \sin \delta) \\ \text{» de conversion} \dots (\partial v) & - \mu gh \sin i \sin \theta \cos \theta \\ \text{» de marche} \dots\dots (\partial \sigma) & + \mu g R \cos \delta \sin i \end{aligned}$$

Les notations sont celles-ci :

- μ masse du cycle monté,
- h cote de son centre de gravité,
- θ angle de chute,
- i inclinaison du sol,
- δ angle de la direction de marche I avec la ligne de pente montante.

En dehors de la marche rectiligne, on ne peut plus parler ici de régimes d'équilibre, de sorte que le seul intérêt des nouvelles formules semble être dans une modification assez évidente relative au dérapage.

Telles sont les raisons qui ont détourné mon attention de cette partie du sujet qui me semble traité d'une façon assez complète dans ce Mémoire.

Outre les réponses aux questions proposées, je dois signaler dans les résultats :

Une application étendue et avantageuse de la méthode de calcul géométrique de Grassmann.

Plusieurs applications d'une méthode pratique pour la résolution numérique des équations.

La discussion d'une équation complète du quatrième degré renfermant un paramètre variable (n° 120).

Une adaptation des équations de Lagrange à un cas où elles ne sont pas exactement applicables.

L'exposition d'une méthode pour l'étude des questions de stabilité et l'application de cette méthode.

L'exposition d'une méthode pour étudier l'influence des frottements sur la stabilité.

Des considérations sur la stabilité des appareils rotatifs.

Une digression sur certains paradoxes de Mécanique.

Une digression sur l'Électrodynamique.

ERRATA.

Page 94, dernière formule, au dénominateur, *au lieu de $x \cos x$, mettre $x \cos z$.*

Page 136, 11^e ligne, formule donnant $\frac{y}{\sin \theta}$. Numéroté cette formule ainsi

(2) $\frac{y}{\sin \theta} = \dots$

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE. — CERCEAU ET MONOCYCLE.

CHAPITRE I. — CERCEAU.

§ I. — CINÉMATIQUE DU CERCEAU. NOTATIONS ET CHOIX DES VARIABLES.

	Pages.
1. Axes de coordonnées; conventions générales	1
2. Roulement du cerceau; rotations	2
3. Vitesses des vecteurs envisagés	3
4. Moments d'inertie	4

§ II. — ÉQUATIONS DU ROULEMENT DU CERCEAU.

5. Application du principe des travaux virtuels	5
6. Moment résultant des forces d'inertie	6
7. Équations du mouvement du cerceau	7

§ III. — ÉQUILIBRE DU RÉGIME DU CERCEAU. STABILITÉ. DÉRAPAGE.

8. Conditions d'équilibre d'un régime du cerceau	8
9. Stabilité d'un régime d'équilibre	12
10. Tendances au dérapage	14
11. Méthode directe pour obtenir l'équation d'équilibre (E)	16

§ IV. — DISCUSSION DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE.

12. Changement de variables et plan de la discussion	17
13. Discussion de l'équation d'équilibre (E)	18
14. Discussion de la stabilité	20
15. Discussion de la tendance au dérapage	25
16. Résumé de la discussion. Diagramme général et sa limitation pratique	28

§ V. — COMPLÉMENT PRATIQUE A LA DISCUSSION DES RÉGIMES D'ÉQUILIBRE.

17. Marche et pivotement	28
17 ^{bis} . Intersection de la courbe de stabilité (S) avec la courbe (N) qui distingue la marche du pivotement	31
18. Stabilité pratique	32
19. Action de la baguette dans la conversion du cerceau	33

CHAPITRE II. — MONOCYCLE.

§ I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

	Pages.
20. Le problème du monocycle comparé avec celui du cerceau	36
21. Constantes du cavalier.....	37
22. Application au principe des travaux virtuels	37
23. Travaux virtuels des forces d'inertie.....	39
24. Équations du mouvement du monocycle	41

§ II. — MARCHÉ DU MONOCYCLE ET DES CYCLES EN GÉNÉRAL.

25. Étude de l'équation de marche (s).....	42
26. Paradoxe de la marche du cycle	43
26 ^{bis} . Expérience sur la bicyclette.....	44
27. Paradoxe du navire. Halage	46
28. Réflexions sur le pédalier.....	47

§ III. — ÉQUILIBRE DU MONOCYCLE.

29. Condition d'équilibre	48
30. Tendance au dérapage	49
31. Danger des virages brusques.....	50
32. Discussion des régimes d'équilibre.....	51

§ IV. — STABILITÉ DU MONOCYCLE.

33. Simplification des équations du monocycle.....	55
34. Condition de stabilité déduite des équations simplifiées.....	56
35. Méthode pour discuter la stabilité des régimes d'équilibre.....	56
36. Discussion de la stabilité en marche rectiligne.....	57
37. Réflexions sur la stabilité des appareils rotatifs.....	59
38. Rapprochement avec la loi de Laplace. Digression sur l'électromagnétisme	61
39. Discussion de la stabilité d'un monocycle infiniment léger.....	63
40. Condition de stabilité dans un cas intermédiaire.....	65
41. Construction de la courbe de stabilité dans le cas intermédiaire choisi.....	67

CONCLUSION : PRINCIPE D'UN MONOCYCLE STABLE.

42.	70
----------	----

DEUXIÈME PARTIE. — BICYCLETTES ET BICYCLES.

CHAPITRE I. — GÉOMÉTRIE DE LA BICYCLETTE.

§ — I. INTRODUCTION. ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

43. Description sommaire de la bicyclette.....	71
44. Choix des axes, des données et des variables; fonctions σ et μ	73

TABLE DES MATIÈRES.

191

	Pages.
43. Méthode pour déterminer les fonctions σ et μ	74
46. Calcul des vecteurs envisagés au n° 43.....	75
47. Calcul des directions remarquables en fonction des directions coordonnées I, J, K....	75
48. Équations du problème de la détermination de σ et μ	76
49. Transformation de la première équation.....	76
§ II. — CAS OU LE CADRE DEMEURE VERTICAL ($\theta = 0$).	
50. Simplification et interprétation géométrique des formules.....	77
51. Méthode d'approximation pour résoudre numériquement les équations en σ et μ	79
52. Application numérique.....	80
53. Position la plus basse du cadre.....	80
54. Lieu des contacts de la roue mobile avec le sol.....	81
55. Autre méthode pour établir les résultats de ce paragraphe.....	83
§ III. — CAS OU LE CADRE N'EST PAS VERTICAL ($\theta \neq 0$).	
56. Calcul des fonctions σ et μ	83
57. Fonctions accessoires α et $\beta = -\theta_1$ relatives à la roue directrice.....	84
58. Axes liés à la roue directrice.....	86
CHANGEMENT DE NOTATION.	
58 ^{bis} . La lettre η est remplacée par τ au Chapitre II; de plus, μ est remplacé par ω au Chapitre III.....	86

CHAPITRE II. — CINÉMATIQUE ET STATIQUE DE LA BICYCLETTE.

§ I. — PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES.

59. Degré de liberté de la bicyclette. Variables indépendantes $\delta\sigma$, $\delta\theta$, $\delta\gamma$	87
60. Déplacements δv , $\delta\tau$, $\delta\sigma$, fonctions des trois déplacements fondamentaux $\delta\sigma$, $\delta\theta$, $\delta\gamma$...	87
61. Méthode analytique pour le calcul de δv , $\delta\tau$, $\delta\sigma$	88
62. Méthode géométrique.....	90
63. Calcul de $\delta\tau$	91
64. Calcul de δv	92
65. Calcul de $\delta\sigma$	93
66. Résumé des résultats. Relations entre les vitesses.....	93
66 ^{bis} . Les trois rotations principales de la roue motrice.....	95

§ II. — APPLICATION DES FORMULES A L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE AU REPOS.

67. Position d'équilibre du guidon, pour un angle de chute donné θ	97
68. Paradoxe de la fixation de la bicyclette.....	97
69. Équilibre de la bicyclette au repos. Son instabilité.....	98

NÉCESSITÉ DE NOUVELLES MÉTHODES POUR L'ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA BICYCLETTE.

70.....	102
---------	-----

CHAPITRE III. — NOUVELLES MÉTHODES.

§ I. — ADAPTATION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE AU PROBLÈME DES CYCLES.

	Pages.
71. Les équations de Lagrange ne sont pas applicables au problème des cycles	103
72. Modification des équations de Lagrange.....	104
73. Application au cerceau des équations de Lagrange modifiées.....	106
74. Application au monocycle.....	108

§ II. — MÉTHODE GÉNÉRALE POUR L'ÉTUDE DES PROBLÈMES DE STABILITÉ.

75. Forme des équations du mouvement d'un système qui admet des états de régime d'équilibre.....	111
76. Méthode pour l'étude de la stabilité des régimes d'équilibre.....	113
77. Application de la méthode au cerceau.....	115
78. Application au monocycle.....	116

CHAPITRE IV. — DYNAMIQUE DE LA BICYCLETTE.

§ I. — ÉQUILIBRE AVEC LES MAINS. ÉQUATION DE CHUTE.

79. Les trois équations du mouvement; quatre problèmes.....	118
80. L'équation de chute.....	120
81. Calcul du terme $\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\theta} \right)' \right $ pour la roue motrice.....	121
82. » » pour la roue directrice.....	124
83. » » pour le cadre monté.....	125
84. Calcul des termes venant de la gravité.....	127
85. Équation d'équilibre de la bicyclette avec les mains.....	128
86. Simplification de l'équation.....	130
86 ^{bis} . Conséquences pratiques.....	132
87. Conversions.....	133
88. Application numérique.....	134
89. Importance numérique du terme $-\mu g e \cos \theta \frac{d\eta}{dt}$ négligé au n° 86.....	135

§ II. — ÉQUILIBRE SANS LES MAINS.

90. L'équation du guidon $\left(\frac{dT}{d\gamma'} \right)' - \sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right = - \sum m g \frac{dZ}{d\gamma}$	137
91. Termes $\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right $	137
92. Terme $\sum m M' \left \left(\frac{dM}{d\gamma} \right)' \right $ de la roue directrice.....	138
93. Termes de la gravité.....	140
94. Résumé des résultats. Équation d'équilibre du guidon.....	140
95. Équation d'équilibre du guidon simplifiée.....	141
96. Application numérique.....	143
97. Conséquence : nécessité des déplacements latéraux du corps.....	144

	Pages.
98. Influence d'un déplacement latéral du corps sur les équations d'équilibre	145
§ III. — STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE AVEC LES MAINS.	
99. Force vive T des trois parties de la bicyclette.....	146
100. Formation de l'équation de chute.....	147
101. Forme de l'équation caractéristique de stabilité $\frac{df}{dp'} \lambda^2 + \frac{df}{dp} \lambda + \frac{df}{d\theta} = 0$	148
102. Coefficient $\frac{df}{dp'}$ de l'équation caractéristique.....	149
103. Deux remarques de coefficient $\frac{df}{d\theta}$ de l'équation caractéristique.....	150
104. Signe du coefficient $\frac{df}{d\theta}$	152
105. L'équilibre de la bicyclette est instable quand le guidon est fixé au cadre	155
106. Sur le maintien de l'équilibre à l'aide du guidon.....	156
§ IV. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN ÉTAT INFINIMENT VOISIN DE LA MARCHÉ RECTILIGNE.	
107. Limitation du problème.....	157
108. Formules simplifiées.....	158
109. Termes $\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)'$ et $\left(\frac{dT}{d\gamma'}\right)'$ relatifs au cadre monté.....	161
110. » » à la roue motrice.....	162
111. » » à la roue directrice.....	163
112. Termes $-\sum m M' \left(\frac{dM}{d\theta}\right)'$ et $-\sum m M' \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)'$ relatifs au cadre monté	165
113. » » à la roue motrice.....	166
114. » » à la roue directrice.....	166
115. Termes de la gravité.....	169
116. L'équation de chute et l'équation de guidon.....	169
§ V. — STABILITÉ DE LA MARCHÉ RECTILIGNE SANS LES MAINS.	
117. Calcul numérique des coefficients des deux équations du mouvement.....	172
118. Changement de variable indépendante $T = st$	173
119. Intégration des équations du mouvement du n° 118.....	174
120. Étude de l'équation caractéristique. Deux limites de la vitesse	175
121. Recherche de la limite inférieure que la condition de stabilité impose à la vitesse ...	177
122. Influence des constantes de la bicyclette sur les deux limites de la vitesse.....	179
123. Influence des frottements sur la stabilité	182
CONCLUSIONS ET RÉSULTATS.	
124.....	186
<i>Errata</i>	188



2930 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS,
quai des Grands-Augustins, 55.
