

DK 531.3: 629.118

# Die Stabilität von Einspurfahrzeugen

Von E. Döhning, Braunschweig<sup>1)</sup>

*Aus dem Studium der für Einspurfahrzeuge aufgestellten Bewegungsgleichungen geht hervor, daß drei charakteristische Bewegungsformen möglich sind, bei denen sich das Fahrzeug je nach dem vorliegenden Fahrgeschwindigkeitsbereich theoretisch stabil bzw. mehr oder minder instabil verhalten kann. Die Berechnungsweise wird auf drei verschiedene Versuchsmaschinen angewendet. Eine gesonderte Betrachtung dient dazu, den Einfluß des mechanischen Steuerdämpfers darzulegen.*

Die Entwicklung des Fahrwerks von Einspurfahrzeugen ist mit sehr wenig theoretischem Aufwand betrieben worden; das Fahrwerk des Krafrades erhielt seine heutige Form im wesentlichen durch empirisches Gestalten. Über die Möglichkeiten, dieses ziemlich verwickelte Gebilde zu berechnen, wurde erstaunlich wenig bekannt, obwohl bereits im Jahre 1890 *F. Klein* und *A. Sommerfeld*<sup>2)</sup> die theoretische Behandlung des Fahrrades mit Erfolg vorgenommen haben. Es ist zwar mit verhältnismäßig kleinem Aufwand möglich, die Steuerung des im übrigen fertiggestellten Krafrades ausschließlich durch Versuche so zu bemessen, daß sich die üblichen Fahreigenschaften ergeben, weil man dabei nur zwei Veränderliche, den Steuerwinkel und den Nachlauf, in Betracht zu ziehen braucht. Zweifellos hat aber die Kenntnis der theoretischen Zusammenhänge für den Konstrukteur große Bedeutung, wenn Bestleistungen erzielt und die Fahrwerke weiter vervollkommen werden sollen.

Nachfolgend wird die Eigenbewegung des Einspurfahrzeugs, insbesondere die Frequenz der Eigenbewegung um den stationären Bewegungszustand, berechnet. Die von *F. Klein* und *A. Sommerfeld*<sup>2)</sup> für das Fahrrad angesetzten Gleichungen wurden so erweitert, daß sie auch für das Krafrad gelten.

## 1. Aufstellen der linearisierten Bewegungsgleichungen

### 1.1 Bezeichnungen

Das Einspurfahrzeug besteht aus zwei um eine gemeinsame Achse (Steuerachse) drehbaren Systemen: dem Vorderrad mit der Gabel, dem Lenker, der Lampe, dem Kotflügel und dem Gestänge sowie dem Hinterrad mit dem Rahmen, dem Motor und dem mit dem Rahmen starr verbunden gedachten Fahrer. Die gefederte Aufhängung der Räder bleibe unberücksichtigt, da nur die geradlinige Bewegung auf ebener Fahrbahn in der Nähe der lotrechten Mittel-lage betrachtet wird.

Zum Bestimmen der Lage des Fahrzeugs sind fünf Koordinaten nötig: zwei Koordinaten legen den Aufstandspunkt des Hinterrades fest, zwei Winkel geben die Lage der Radebene an, und eine Koordinate bestimmt den Winkel zwischen der Rahmen- und der Vorderradebene. Hinzu kommt die Bedingung, daß beide Räder den Boden berühren müssen. Bei fünf Freiheitsgraden der Lage hat das Fahrzeug je-

doch nur drei Freiheitsgrade der Bewegung: die Neigung der Rahmenebene (das Kippen), die Drehung der gelenkten Teile um die Steuerachse und die Vorwärtsbewegung, deren Richtung durch die Lage der Vorderradebene bereits bestimmt ist. Es handelt sich also, wie bei allen Systemen mit rollenden Bewegungen, um ein nichtholonomes System, d. h. das Fahrzeug kann jede seiner  $\infty^5$ -fachen Lagen durch eine Folge von erlaubten Bewegungen einnehmen, jedoch nicht in jede unendlich benachbarte Lage durch eine unendlich kleine Bewegung gelangen.

Die Rechnung wird für kleine Winkel durchgeführt, da nur bei einer Linearisierung der Bewegungsgleichungen deren Integration nach dem Einsetzen der nichtholomonen Rollbedingung möglich ist. Als Bezeichnungen, die man z. T. aus Bild 1 und 2 ersieht, seien u. a. verwendet:

- $a$  Abstand der gedachten Trennstelle zwischen Vorder- und Hinterradsystem vom Aufstandspunkt des Vorderrades
- $c_1, c_2$  Abstand des Durchstichpunktes der Steuerachse durch die Fahrbahn vom Aufstandspunkt des Vorderrades (Nachlauf) bzw. des Hinterrades
- $C_1$  bis  $C_3$  Konstanten
- $Fr = v/\sqrt{gl}$  Froudezahl
- $g$  Fallbeschleunigung
- $h$  Angriffshöhe der Reaktionskraft  $Y$
- $h_1, h_2$  Abstand des Vorderradsystem- bzw. Hinterradsystem-Schwerpunktes von der Spurlinie
- $J_1, J_2$  Massenträgheitsmoment des Vorder- bzw. Hinterradsystems
- $k$  Trägheitsarm
- $K = k/l$  Trägheitsverhältnis
- $l = c_2 - c_1$  Radstand
- $L$  Wellenlänge
- $m_1, m_2$  Masse des Vorder- bzw. Hinterradsystems
- $m_{1R}, m_{2R}$  reduzierte Masse des Vorder- bzw. des Hinterrades mit Motor
- $M = m_1/m_2$  Massenverhältnis
- $M_D, M_R$  Reaktionsmoment des Steuerdämpfers bzw. des Vorderradsystems
- $N_1, N_2$  Drall des Vorder- bzw. Hinterrades
- $r$  waagerechter Abstand zwischen dem Angriffspunkt von  $Y$  und der Lotrechten durch den Aufstandspunkt des Vorderrades
- $r_1, r_2$  Abstand des Schwerpunkt-Fußpunktes auf der Spurlinie vom Aufstandspunkt für das Vorder- bzw. Hinterrad
- $R$  Arbeitshalbmesser des Vorder- und des Hinterrades

<sup>1)</sup> Mitteilung aus dem Institut für Fahrzeugtechnik der Technischen Hochschule Braunschweig.

<sup>2)</sup> *F. Klein* u. *A. Sommerfeld*: Über die Theorie des Kreisels. Bd. IV, Technische Anwendungen. Berlin und Leipzig 1910.

$s_1, s_2$	Abstand des Vorder- bzw. Hinterradschwerpunktes von der Parallelen zur Steuerachse durch den zugehörigen Aufstandspunkt
$l$	Zeit
$U, V, W$	raumfeste Koordinaten
$v$	Fahrgeschwindigkeit
$x, y, z$	körperfeste Koordinaten
$Y$	in der Lotrechten ( $y$ -Richtung) wirkende Reaktionskraft auf die Steuerachse
$Y_1, Y_2$	im Aufstandspunkt des Vorder- bzw. Hinterrades in lotrechter Richtung wirkende Reaktionskraft
$Z$	senkrecht zur Radebene in der Steuerachse wirkende Reaktionskraft
$\alpha, \beta$	Real- bzw. Imaginärteil von $\Omega$
$\gamma$	Lenkeinschlagwinkel
$\vartheta_1, \vartheta_2$	Neigungswinkel der Vorder- bzw. Hinterradebene gegen die Lotrechte (Schräglagenwinkel)
$\lambda$	Frequenzparameter
$\sigma$	Steuerwinkel
$\tau$	reduzierte Zeit
$\varphi_1, \varphi_2$	Winkel der Vorder- bzw. Hinterradebene gegen die mittlere Fahrtrichtungsebene

$\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  Winkel zwischen Vorder- und Hinterradebene (Lenkungswinkel)  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit eines Rades  
 $\Omega$  reduzierte Frequenz mit den Wurzeln  $\Omega_1$  bis  $\Omega_4$ .

1.2 Geometrische Beziehungen

Zwischen den Neigungswinkeln  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  der Vorderrad- bzw. der Hinterradebene besteht eine geometrische Beziehung. Denkt man sich das Kraftrad bei gerade gestelltem Lenker z. B. nach rechts geneigt<sup>3)</sup>, so gilt  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ . Der Winkel  $\gamma$  bezeichne den Lenkeinschlagwinkel, gemessen um die Steuerachse (gedachte Drehachse der gelenkten Teile); er sei nach links positiv, nach rechts negativ gezählt. Wird nun außerdem noch die Steuerung betätigt und ebenfalls nach rechts (also um  $-\gamma$ ) eingeschlagen, so erhöht sich die Neigung des Vorderrades wegen der Schräglagestellung der Steuerachse unter dem Steuerwinkel  $\sigma$  gegen die Lotrechte um die Komponente des Winkels  $\gamma$  um die Spurlinie. Diese Komponente hat nach den Sätzen für kleine Drehungen den Wert  $-\gamma \sin \sigma$ . Somit gilt:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 - \gamma \sin \sigma \dots \dots \dots (1).$$

Die Komponente des Winkels  $\gamma$  um die lotrechte Achse beträgt  $\gamma \cos \sigma$  und ist gleich dem Winkel  $\varphi_1 - \varphi_2$  zwischen der Vorder- und der Hinterradebene gegen die Ebene der mittleren Fahrtrichtung (vgl. Bild 1):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \gamma \cos \sigma \dots \dots \dots (2).$$

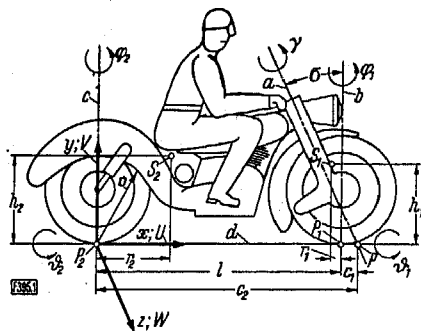


Bild 1. Einspurfahrzeug.

a Steuerachse, b Lotrechte durch den Aufstandspunkt  $P_1$  des Vorderrads, c Lotrechte durch den Aufstandspunkt  $P_2$  des Hinterrads, d Spurlinie, P Durchstichpunkt von a durch die Fahrbahn,  $S_1$  und  $S_2$  Schwerpunkte des Vorder- bzw. des Hinterradsystems,  $\sigma$  Steuerwinkel (Winkel zwischen a und b),  $\gamma$  Lenkeinschlagwinkel um a,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  Winkel der Vorder- bzw. der Hinterradebene gegen die mittlere Fahrtrichtungsebene,  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  Neigungswinkel der Vorder- bzw. der Hinterradebene gegen die Lotrechte,  $h_1$  und  $h_2$  Abstand des Punktes  $S_1$  bzw.  $S_2$  von d,  $r_1$  und  $r_2$  Abstand des Schwerpunktes Fußpunktes auf d vom Aufstandspunkt für das Vorder- bzw. das Hinterrad,  $c_1 = \overline{P_1 P}$  Nachlauf,  $c_2 = \overline{P_2 P}$ ,  $l = \overline{P_1 P_2} = c_2 - c_1$  Radstand;  $x, y, z$  körperfestes Koordinatensystem;  $U, V, W$  raumfestes Koordinatensystem, o Drehvektor

1.3 Ermittlung der nichtholonomen Beziehung

Aus der Betrachtung des Bewegungsvorganges ergibt sich die noch benötigte nichtholonome Rollbedingung, Bild 3. Betrachtet man die Geschwindigkeit

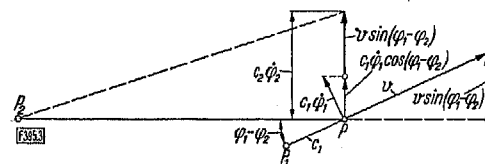


Bild 3. Geschwindigkeiten am Einspurfahrzeug.

$P, P_1, P_2, c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$  wie in Bild 1, ferner:  $v$  Fahrgeschwindigkeit des Vorderrades,  $\dot{\varphi}_1 = d\varphi_1/dl$ ,  $\dot{\varphi}_2 = d\varphi_2/dl$

keit  $v$  des Vorderrades in seiner Spur und seine Drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_1 = d\varphi_1/dl$  um die Lotrechte als gegeben, so wird damit auch die Bewegung des Hinterrades bestimmt. Denn das Hinterrad ist im Durchstichpunkt P der Steuerachse (durch die Fahrbahn), der sich mit dem Vorderrad bewegt, angelenkt und muß stets diesem Punkt folgen. Der Durchstichpunkt P hat in der Spur des Vorderrades die Geschwindigkeit  $v$  und senkrecht zur Vorderradebene die Geschwindigkeit  $c_1 \dot{\varphi}_1$ , da die Drehung sich mit  $\dot{\varphi}_1$  um den Aufstandspunkt  $P_1$  (Berührungspunkt zwischen dem Rad und der Fahrbahn) vollzieht, der um den Abstand  $c_1 = \overline{P_1 P}$  von P entfernt liegt. Die Strecke  $c_1$ , der sog. Nachlauf, ist eine der wichtigsten Größen des Systems. Die Spur des Hinterrades bildet mit der des Vorderrades den Winkel  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Senk-

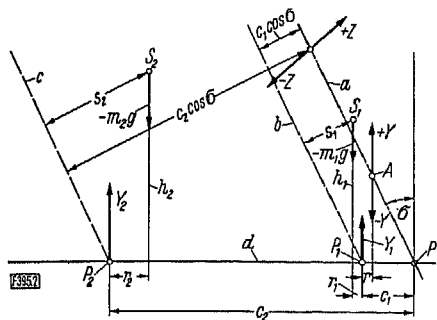


Bild 2. Kräfte am Einspurfahrzeug.

a, d,  $P_1, P_2, P, S_1, S_2, \sigma, h_1, h_2, r_1, r_2, c_1, c_2$  wie in Bild 1, ferner: b und c Parallele zu a durch  $P_1$  bzw.  $P_2$ , A Angriffspunkt der lotrecht wirkenden Reaktionskräfte  $Y, r$  waagerechter Abstand zwischen A und  $P_1$ ,  $s_1$  Abstand des Punktes  $S_1$  von b,  $s_2$  Abstand des Punktes  $S_2$  von c,  $m_1$  und  $m_2$  Masse des Vorder- bzw. des Hinterradsystems,  $g$  Fallbeschleunigung,  $Y$  lotrechte Reaktionskraft in der Steuerachse,  $Z$  senkrecht zur Radebene in der Steuerachse wirkende Reaktionskraft,  $Y_1$  und  $Y_2$  lotrechte Reaktionskraft in  $P_1$  bzw. in  $P_2$

<sup>3)</sup> Angaben wie rechts oder links beziehen sich stets auf den im Sattel sitzenden Fahrer.

recht zur Spur des Hinterrades hat also der Punkt P die Bewegungskomponente

$$c_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + v \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dots (3)$$

Diese Bewegungskomponente des Durchstichpunktes kann man auch durch seinen Abstand  $c_2$  vom Aufstandspunkt  $P_2$  des Hinterrades und die Drehgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_2 = d\varphi_2/dt$  der Rahmenebene um die Lotrechte ausdrücken. Für kleine Winkel ergibt sich so als die nichtholonome Bedingung

$$c_2 \dot{\varphi}_2 = c_1 \dot{\varphi}_1 + v(\varphi_1 - \varphi_2) \dots (4)$$

Die Geschwindigkeitskomponente  $v^*$  des Punktes P in Richtung der Spur des Hinterrades,

$$v^* = v \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - c_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dots (5)$$

ist von  $v$  nur um Größen zweiter Ordnung verschieden.

### 1.4 Bestimmung der angreifenden Kräfte

Es werden jetzt die am Fahrzeug wirkenden Kräfte und Reaktionskräfte bestimmt. Nach oben wirkende Kräfte seien positiv, nach unten gerichtete negativ eingesetzt. In den beiden Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$  wirken mit  $g$  als Fallbeschleunigung sowie mit  $m_1$  und  $m_2$  als Masse des Vorder- bzw. des Hinterradsystems die beiden Schwerkkräfte  $m_1 g$  und  $m_2 g$ . An den beiden Aufstandspunkten und am Steuerkopf (der Lagerung der Gabel im Rahmen) greifen Reaktionskräfte an.

Für die lotrechten Reaktionskräfte braucht man nur die Kräfte zu berücksichtigen, die beim Geradeausfahren in der Gleichgewichtslage den Schwerkkräften entgegenwirken, da deren Änderungen bei kleinen Abweichungen von der Geradeausfahrt von höherer Ordnung klein sind. Im Aufstandspunkt des Hinterrades wirkt die lotrechte Kraft

$$Y_2 = m_2 g [(l - r_2)/l] + m_1 g (r_1/l) \dots (6)$$

in dem des Vorderrades die lotrechte Kraft

$$Y_1 = m_2 g (r_2/l) + m_1 g [(l - r_1)/l] \dots (7)$$

Dabei bedeuten  $r_1$  und  $r_2$  die in Bild 1 und 2 definierten waagerechten Abstände der Schwerpunkte von den Aufstandspunkten und  $l$  den sog. Radstand. Im Steuerkopf sind eine Reaktionskraft und ein Reaktionsmoment anzubringen. Auf das Vorderradsystem wirkt die lotrechte Kraft

$$-Y = Y_2 - m_2 g = -m_2 g (r_2/l) + m_1 g (r_1/l) \dots (8)$$

Am Rahmen greift an:

$$Y = -Y_2 + m_2 g = m_2 g (r_2/l) - m_1 g (r_1/l) \dots (9)$$

Liegt die gedachte Trennstelle zwischen dem Vorder- und dem Hinterradsystem im Abstand  $a$  hinter dem vorderen Aufstandspunkt  $P_1$ , so beträgt das am Vorderradsystem angreifende Reaktionsmoment (Rechtsdrehung positiv)

$$M_R = Y_2(l - a) - m_2 g(l - a - r_2) \dots (10)$$

Am Rahmen wirkt entsprechend das Reaktionsmoment  $-M_R$ .

Nun kann man aber das Drucklager an einer beliebigen Stelle in der Steuerachse einbauen, also auch durch Verschieben auf der Steuerachse die lotrechte Kraft und das Moment zu einer Einzelkraft zusammenfassen. Für  $M_R = 0$  folgt aus Gl. (10) und (8)

$$a = m_1 r_1 l / (-m_2 r_2 + m_1 r_1) \dots (11)$$

Die lotrechten Reaktionskräfte sind dann im Abstand

$$r = -a = m_1 r_1 l / (m_2 r_2 - m_1 r_1) \dots (12)$$

vor dem vorderen Aufstandspunkt in der Steuerachse anzubringen. Die Höhe des Angriffspunktes dieser Reaktionskräfte beträgt

$$h = (c_1 - r) \operatorname{ctg} \sigma = \left( c_1 - \frac{m_1 r_1 l}{m_2 r_2 - m_1 r_1} \right) \operatorname{ctg} \sigma \quad (13)$$

Nun werden die waagerechten Reaktionskräfte bestimmt. In der Steuerachse wirken senkrecht zur Radebene die Kräfte  $\pm Z$ , die die seitliche Bewegung übertragen. Ihre Größe hängt vom jeweiligen Bewegungszustand ab und kann nur bei Kenntnis des Bewegungsablaufes angegeben werden. Jedenfalls sind sie von erster Ordnung und daher zu berücksichtigen. Die Höhe ihres Angriffspunktes wird nicht benötigt.

Ferner wirken in der Steuerachse Reaktionskräfte in Fahrtrichtung, die die zum Antrieb des Vorderrades nötigen Kräfte übertragen. Diese Reaktionskräfte sind, wenn man den Rollwiderstand und den Durchdringungswiderstand des Vorderrades vernachlässigt, beim Geradeausfahren in der Gleichgewichtslage gleich null, bei kleinen Abweichungen hiervon auch nur von zweiter Ordnung.

Bei einem Lenkausschlag aus der Mittellage heraus erfahren die Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  eine kleine Senkung. Diese gibt aber lediglich zu Gliedern zweiter Ordnung Anlaß, die hier nicht berücksichtigt werden. Die entsprechenden Kraftglieder gehen jedoch über die Reaktionskräfte  $Y$  an der Steuerachse in die Bewegungsgleichungen ein (vgl. später Abschnitt 1.6). In den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_2$  greift die Zentrifugalkraft  $m_1 v \dot{\varphi}_1$  bzw.  $m_2 v \dot{\varphi}_2$  senkrecht zur Radebene an.

Der Drall  $N$  (Impulsmoment) der Räder folgt aus ihrem Massenträgheitsmoment  $J$ , ihrer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und ihrem Arbeitshalbmesser  $R$  zu

$$N = J \omega = J v / R \dots (14)$$

Zu dem Drall des Hinterrades ist der des Motors zu addieren, wenn dieser in der Rahmenebene mit gleicher Drehrichtung läuft; bei entgegengesetzter Drehrichtung vermindert sich der Drall des Hinterrades um den des Motors. Der Drall des Motors kann zweckmäßig als Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Trägheitsmomentes des Hinterrades (unter Beachtung des Übersetzungsverhältnisses vom Rad zum Motor) berücksichtigt werden. Dabei ergibt sich für das Vorderrad  $N_1 = J_1 v / R$  und für das Hinterrad mit Motor  $N_2 = J_2 v / R$ . Der Arbeitshalbmesser  $R$  ist für das Vorder- und für das Hinterrad gleich groß.

Ein Kippen um die Spurlinie ruft eine Kreiselkraft um die Lotrechte hervor, und zwar am Hinterrad mit  $\dot{\vartheta}_2 = d\vartheta_2/dt$  von der Größe  $-N_2 \dot{\vartheta}_2$  und am Vorderrad mit  $\dot{\vartheta}_1 = d\vartheta_1/dt$  von der Größe  $-N_1 \dot{\vartheta}_1$ .

Durch eine Drehung um die Lotrechte wird ein Kreismoment um die Spurlinie ausgelöst, und zwar  $N_2 \dot{\varphi}_2$  am Hinterrad und  $N_1 \dot{\varphi}_1$  am Vorderrad.

Um die Bewegungsgleichung anschreiben zu können, muß man die zeitliche Änderung  $\dot{\mathfrak{B}}_P$  des Impulsmomentvektors  $\mathfrak{B}_P$  um die Drehachse, der die um diese Achse wirkenden Momente  $\mathfrak{M}_P$  gleich sind, ermitteln. Das raumfeste Koordinatensystem wird mit  $U, V, W$ , das körperfeste mit  $x, y, z$  bezeichnet (vgl. Bild 1). Mit  $\mathfrak{o}$  als Drehvektor des Vorderrad- bzw. des Hinterradsystems um den Aufstandspunkt und  $\mathfrak{B}_{rel}$  als Impulsmomentvektor bezüglich des körperfesten Koordinatensystems gilt

$$\dot{\mathfrak{B}}_P = \dot{\mathfrak{B}}_{rel} + \mathfrak{o} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{M}_P \dots \dots (15).$$

Der Drehvektor  $\mathfrak{o}$  hat in Richtung von  $x, y, z$  die Komponenten  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$  und 0. Dabei sind  $\vartheta$  und  $\varphi$  allgemein an Stelle von  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  bzw.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gesetzt. Mit  $J_{xx}$  und  $J_{yy}$  als Massenträgheitsmoment des Systems um die  $x$ - bzw. die  $y$ -Achse und  $J_{xy}, J_{xz}$  sowie  $J_{yz}$  als Zentrifugalmoment in der  $x, y$ -Ebene, der  $x, z$ -Ebene bzw. der  $y, z$ -Ebene setzt sich der Drall  $\mathfrak{B}$  aus den entsprechenden Komponenten  $J_{xx} \dot{\vartheta} - J_{xy} \dot{\varphi}, -J_{xy} \dot{\vartheta} + J_{yy} \dot{\varphi}$  und  $-J_{xz} \dot{\vartheta} - J_{yz} \dot{\varphi}$  zusammen.

Das Vektorprodukt  $\mathfrak{o} \times \mathfrak{B}$  führt zu Gliedern, in denen die Winkelgeschwindigkeit in zweiter Ordnung vorkommt. Der Fahrversuch zeigt, daß auch die Winkelgeschwindigkeit bei den betrachteten Eigenbewegungen als klein angesehen werden kann, die quadratischen Geschwindigkeitsglieder also vernachlässigt werden dürfen. Man erhält dann als Komponenten  $\dot{B}_U, \dot{B}_V, \dot{B}_W$  der zeitlichen Dralländerung  $\dot{\mathfrak{B}}_P$  in der  $U$ -,  $V$ - und  $W$ -Richtung mit  $M_U, M_V, M_W$  als entsprechenden Komponenten von  $\mathfrak{M}$  und mit  $\dot{\vartheta} = d^2\vartheta/dt^2$  sowie  $\dot{\varphi} = d^2\varphi/dt^2$ :

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} \dot{\vartheta} - J_{xy} \dot{\varphi} &= M_U = \dot{B}_U, \\ -J_{xy} \dot{\vartheta} + J_{yy} \dot{\varphi} &= M_V = \dot{B}_V, \\ -J_{xz} \dot{\vartheta} - J_{yz} \dot{\varphi} &= M_W = \dot{B}_W \end{aligned} \right\} \dots \dots (16).$$

Die Komponente  $M_W$  in  $W$ -Richtung bewirkt eine Änderung der Reaktionskräfte  $\pm Y$ , die jedoch gegenüber der Schwerkraft als klein von erster Ordnung angesehen wird, so daß ihr Moment um die zu betrachtenden Achsen von zweiter Ordnung bleibt.

Die Bewegungsgleichungen der beiden Systeme für die  $U$ -Achse (die Spurlinie) können jetzt angegeben werden. Dabei darf man sofort die beiden Gleichungen für das Vorderrad- und das Hinterradsystem algebraisch addieren, da die vektorielle Addition wegen des als klein angenommenen Winkels  $\varphi_1 - \varphi_2$  zwischen den Spurlinien der beiden Räder nur Glieder zweiter Ordnung verursachen würde.

### 1.5 Bewegungsgleichung für das Kippen um die Spurlinie

Die Bewegungsgleichung für das Kippen des Fahrzeugs um die Spurlinie lautet daher bei kleinen Winkeln mit  $J_{1U}$  und  $J_{2U}$  als Trägheitsmoment des Vorder- bzw. des Hinterradsystems um die Spurlinie,  $J_{1UV}$  und  $J_{2UV}$  als Zentrifugalmoment des Vorder- bzw. des Hinterradsystems in der Radebene,  $N_1$  und  $N_2$  als

Drall des Vorder- bzw. des Hinterrades sowie  $m_1$  und  $m_2$  als Masse des Vorder- bzw. des Hinterradsystems:

$$\left. \begin{aligned} J_{1U} \ddot{\vartheta}_1 + J_{2U} \ddot{\vartheta}_2 - J_{1UV} \ddot{\varphi}_1 - J_{2UV} \ddot{\varphi}_2 &= N_1 \dot{\varphi}_1 + \\ + N_2 \dot{\varphi}_2 + v(m_1 h_1 \dot{\varphi}_1 + m_2 h_2 \dot{\varphi}_2) &+ m_1 g h_1 \vartheta_1 + \\ + m_2 g h_2 \vartheta_2 + Y(c_1 - r) \vartheta_1 \operatorname{ctg} \sigma &- Y(c_1 - r) \vartheta_2 \operatorname{ctg} \sigma \end{aligned} \right\} (17)$$

oder mit  $Y$  nach Gl. (9):

$$\left. \begin{aligned} J_{1U} \ddot{\vartheta}_1 + J_{2U} \ddot{\vartheta}_2 - J_{1UV} \ddot{\varphi}_1 - J_{2UV} \ddot{\varphi}_2 &= N_1 \dot{\varphi}_1 + \\ + N_2 \dot{\varphi}_2 + v(m_1 h_1 \dot{\varphi}_1 + m_2 h_2 \dot{\varphi}_2) &+ \\ + g(m_1 h_1 \vartheta_1 + m_2 h_2 \vartheta_2) &+ \\ + g \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) (c_1 - r) &(\vartheta_1 - \vartheta_2) \operatorname{ctg} \sigma \end{aligned} \right\} (18).$$

Das letzte Glied von Gl. (18) kann man durch Einführen der kinematischen Bedingung, Gl. (1), in

$$-g \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) (c_1 - r) \gamma \cos \sigma$$

umschreiben; es verschwindet, wenn das Vorderrad und das Hinterrad in einer Ebene liegen und entspricht der bereits erwähnten Schwerpunktsenkung bei einem Lenkeinschlag.

### 1.6 Momente um die Parallelen zur Steuerachse

Es wäre nun die Bewegungsgleichung für die Drehung um die lotrechten Achsen zu bilden. Man benutzt jedoch zweckmäßiger nicht diese Achsen, sondern solche, die parallel zur Steuerachse durch die Aufstandspunkte verlaufen (vgl. b und c in Bild 2). Auch seien jetzt die Gleichungen für die beiden Systeme zwecks einer besseren Übersicht getrennt aufgestellt. Dabei müssen die Reaktionskräfte an der Trennstelle berücksichtigt werden. Dort wirken die Kräfte  $\pm Z$  senkrecht zur Radebene und  $\pm Y$  in lotrechter Richtung. Außerdem soll das Reaktionsmoment eines Steuerdämpfers in die Rechnung einbezogen werden. Es handelt sich dabei um ein Drehmoment um Achsen parallel zur Steuerachse, das mit  $-M_D$  auf die gelenkten Teile und mit  $+M_D$  auf den Rahmen wirkt. Das Moment wird durch einen Reibungsdämpfer aufgebracht und ist daher als konstant anzusehen. Die praktisch auftretende Schwankung auf Grund des Unterschiedes zwischen der Haft- und der Gleitreibung bleibe unberücksichtigt.

Die Reaktionskräfte  $\pm Y$  und  $\pm Z$  lösen um die Parallele zur Steuerachse durch  $P_2$  das Moment  $(Z + Y \vartheta_2) c_2 \cos \sigma$  und um die Parallele durch  $P_1$  das Moment  $-(Z + Y \vartheta_1) c_1 \cos \sigma$  aus. Eine kleine Drehung um die Steuerachse bzw. um parallele Achsen zu dieser kann man aufteilen in einen Anteil um die Lotrechte (der als Kosinuskomponente in die Rechnung eingeht) und einen Anteil um die Spurlinie (als Sinuskomponente, und zwar negativ, weil das dem Linkseinschlag folgende Kippen nach links in negativer Drehrichtung des Kippwinkels  $\vartheta$  verläuft). Diesen Teildrehungen wirken die entsprechenden Anteile der Massenkräfte um die Lotrechte und die Spurlinie entgegen. Für das Vorderradsystem erhält man als zeitliche Änderung  $\dot{B}_{St}$  des Dralles  $B_{St}$

um die Steuerachse mit  $J_{1V}$  als Trägheitsmoment des Vorderradsystems um die lotrechte Achse durch  $P_1$  die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_{St} &= \dot{B}_V \cos \sigma - \dot{B}_U \sin \sigma = \\ &= (J_{1V} \ddot{\varphi}_1 - J_{1UV} \ddot{\vartheta}_1) \cos \sigma - \\ &- (J_{1U} \ddot{\vartheta}_1 - J_{1UV} \ddot{\varphi}_1) \sin \sigma \end{aligned} \right\} \dots \dots (19).$$

Eine Komponente des Kreiselmomentes um die Steuerachse bzw. ihre Parallelen entsteht durch Kippen der Maschine mit  $\vartheta$  um die Spurlinie (Kosinuskomponente), die zweite durch eine Drehung um die Lotrechte mit  $\dot{\varphi}$  (Sinuskomponente); beide wirken in negativer Richtung um die Steuerachse und geben

$$-N_1 (\dot{\vartheta}_1 \cos \sigma + \dot{\varphi}_1 \sin \sigma).$$

Ferner sind wieder die Momente der Zentrifugalkraft, der Schwerkraft und der Reaktionskräfte  $Z$  und  $Y$  zu berücksichtigen. Der Hebelarm der Zentrifugalkraft beträgt am Rahmensystem (vgl. Bild 2)

$$s_2 = h_2 \sin \sigma + (r_2 / \cos \sigma) \dots \dots (20)$$

und am Vorderradsystem

$$s_1 = h_1 \sin \sigma - (r_1 / \cos \sigma) \dots \dots (21).$$

**1.7 Bewegungsgleichung für das Drehen um die Steuerachse**

Die Bewegungsgleichung für das Drehen des Vorderradsystems um die Steuerachse lautet damit

$$\left. \begin{aligned} (J_{1V} \ddot{\varphi}_1 - J_{1UV} \ddot{\vartheta}_1) \cos \sigma - (J_{1U} \ddot{\vartheta}_1 - J_{1UV} \ddot{\varphi}_1) \sin \sigma &= \\ = -N_1 (\dot{\vartheta}_1 \cos \sigma + \dot{\varphi}_1 \sin \sigma) - m_1 s_1 v \dot{\varphi}_1 - \\ - m_1 g s_1 \vartheta_1 - Y c_1 \vartheta_1 \cos \sigma - Z c_1 \cos \sigma - M_D \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

bzw. entsprechend für das Hinterradsystem mit  $J_{2V}$  als Trägheitsmoment des Hinterradsystems um die lotrechte Achse durch  $P_2$

$$\left. \begin{aligned} (J_{2V} \ddot{\varphi}_2 - J_{2UV} \ddot{\vartheta}_2) \cos \sigma - (J_{2U} \ddot{\vartheta}_2 - J_{2UV} \ddot{\varphi}_2) \sin \sigma &= \\ = -N_2 (\dot{\vartheta}_2 \cos \sigma + \dot{\varphi}_2 \sin \sigma) - m_2 s_2 v \dot{\varphi}_2 - \\ - m_2 g s_2 \vartheta_2 + Y c_2 \vartheta_2 \cos \sigma + Z c_2 \cos \sigma + M_D \end{aligned} \right\} \dots \dots (23).$$

Aus Gl. (22) und (23) folgt durch Eliminieren der unbekanntenen Reaktionskraft  $Z$  als Bewegungsgleichung der Drehung um die Steuerachse

$$\left. \begin{aligned} c_2 [(J_{1V} \cos \sigma + J_{1UV} \sin \sigma) \ddot{\varphi}_1 - (J_{1UV} \cos \sigma + \\ + J_{1U} \sin \sigma) \ddot{\vartheta}_1] + c_1 [(J_{2V} \cos \sigma + J_{2UV} \sin \sigma) \ddot{\varphi}_2 - \\ - (J_{2UV} \cos \sigma + J_{2U} \sin \sigma) \ddot{\vartheta}_2] = - [(N_1 \dot{\vartheta}_1 c_2 + \\ + N_2 \dot{\vartheta}_2 c_1) \cos \sigma + (N_1 \dot{\varphi}_1 c_2 + N_2 \dot{\varphi}_2 c_1) \sin \sigma] - \\ - v (c_2 m_1 s_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 m_2 s_2 \dot{\varphi}_2) - g (c_2 m_1 s_1 \vartheta_1 + \\ + c_1 m_2 s_2 \vartheta_2) + \\ + g c_1 c_2 (\vartheta_2 - \vartheta_1) \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) \cos \sigma + (c_1 - c_2) M_D \end{aligned} \right\} (24).$$

**1.8 Einführen der nichtholonomen Gleichung**

Mit  $c_2 - c_1 = l$  und den Abkürzungen  $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$ ,  $\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \dot{\psi}$  und  $\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\psi}$  erhält man aus Gl. (4) die Formen

$$l \dot{\varphi}_1 = v \psi + c_2 \dot{\psi} \dots \dots (25),$$

$$l \dot{\varphi}_2 = v \psi + c_1 \dot{\psi} \dots \dots (26),$$

$$l \ddot{\varphi}_1 = v \dot{\psi} + c_2 \ddot{\psi} \dots \dots (27)$$

und

$$l \ddot{\varphi}_2 = v \dot{\psi} + c_1 \ddot{\psi} \dots \dots (28).$$

Mittels Gl. (25) bis (28) kann man die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sowie ihre Ableitungen in den Bewegungsgleichungen durch  $\psi$  ausdrücken. Beachtet man noch, daß  $\psi = \gamma \cos \sigma$  und somit nach Gl. (1)

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\psi \operatorname{tg} \sigma \dots \dots (29)$$

ist, so ergibt sich an Stelle von Gl. (18) für das Kippen um die Spurlinie

$$\left. \begin{aligned} J_{1U} \ddot{\vartheta}_1 + J_{2U} \ddot{\vartheta}_2 - \frac{J_{1UV}}{l} (c_2 \ddot{\psi} + v \dot{\psi}) - \\ - \frac{J_{2UV}}{l} (c_1 \ddot{\psi} + v \dot{\psi}) - \frac{1}{l} [(c_1 N_2 + c_2 N_1) \dot{\psi} + \\ + (N_1 + N_2) v \psi] - \frac{v}{l} [(m_1 h_1 c_2 + m_2 h_2 c_1) \dot{\psi} + \\ + (m_1 h_1 + m_2 h_2) v \psi] - g [m_1 h_1 \vartheta_1 + m_2 h_2 \vartheta_2 - \\ - \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) (c_1 - r) \psi] = 0 \end{aligned} \right\} (30)$$

und nach Gl. (24) für das Drehen um die Steuerachse

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{c_2^2}{l} (J_{1V} \cos \sigma + J_{1UV} \sin \sigma) + \right. \\ \left. + \frac{c_1^2}{l} (J_{2V} \cos \sigma + J_{2UV} \sin \sigma) \right] \ddot{\psi} - \\ - c_2 (J_{1UV} \cos \sigma + J_{1U} \sin \sigma) \ddot{\vartheta}_1 - \\ - c_1 (J_{2UV} \cos \sigma + J_{2U} \sin \sigma) \ddot{\vartheta}_2 + \\ + \left[ \frac{c_2}{l} (J_{1V} \cos \sigma + J_{1UV} \sin \sigma) + \right. \\ \left. + \frac{c_1}{l} (J_{2V} \cos \sigma + J_{2UV} \sin \sigma) \right] v \dot{\psi} + \\ + (c_2 N_1 \dot{\vartheta}_1 + c_1 N_2 \dot{\vartheta}_2) \cos \sigma + \frac{1}{l} (N_2 c_1^2 + N_1 c_2^2) \dot{\psi} \sin \sigma + \\ + \frac{v}{l} (c_2 N_1 + c_1 N_2) \psi \sin \sigma + \frac{v}{l} (c_2^2 m_1 s_1 + c_1^2 m_2 s_2) \dot{\psi} + \\ + \frac{v^2}{l} (c_2 m_1 s_1 + c_1 m_2 s_2) \psi + g (c_2 m_1 s_1 \vartheta_1 + c_1 m_2 s_2 \vartheta_2) - \\ - g c_1 c_2 \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) \psi \sin \sigma - (c_1 - c_2) M_D = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (31).$$

Gl. (31) enthält die wesentlichen Glieder, die einen Lenkeinschlag herbeiführen. So berücksichtigen auf der linken Seite der Gleichung die beiden Glieder mit dem Faktor  $c_1 v \dot{\psi}/l$  (elfter und zwölfter Summand) die Führungskräfte, die das Rahmensystem auf die gelenkten Teile ausübt. Ein in der Rahmenebene liegender Druck auf das Lenksystem verursacht offenbar, daß sich das Vorderrad (wie das gezogene Rad eines Rollwagens) in die Rahmenebene hineindreht. Die nächsten sechs Glieder (mit  $N_1$  und  $N_2$ ) geben die Kreiselwirkungen an, die ein Lenkeinschlag oder ein Kippen der Maschine auslösen. Es folgen vier Glieder (mit  $v \dot{\psi}/l$  und  $v^2 \psi/l$ ), die die Zentrifugalkräfte berücksichtigen. Die anschließenden zwei Glieder bezeichnen das Moment der Schwerkraft, das bei einer Schräglage des Kraffrades den Lenker und den Rahmen um die Steuerachse zu drehen sucht, also die statischen Lenkkräfte. Die folgenden zwei Glieder (mit  $g \psi$ ) entsprechen der bereits erwähnten Schwerpunktsenkung bei einem Lenkeinschlag, und die letzten Glieder mit  $M_D$  erhalten die Wirkung eines Reibungs-Steuerdämpfers.

Die in Gl. (30) und (31) noch enthaltenen drei Winkelkoordinaten  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  und  $\psi$  könnte man mit Hilfe der kinematischen Beziehung, Gl. (29), auf zwei verringern. Es ist aber rechnerisch einfacher, die kinematische Beziehung als dritte Bedingungsgleichung hinzuzufügen.

1.9 Lösung der Bewegungsgleichungen

Mit den Ansätzen

$$\vartheta_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad \vartheta_2 = C_2 e^{\lambda t}, \quad \psi = C_3 e^{\lambda t} \dots (32),$$

in denen  $t$  die Zeit,  $\lambda$  einen Frequenzparameter und  $C_1, C_2, C_3$  Konstanten bedeuten, ergeben sich aus Gl. (29) bis (31) die in  $C_1, C_2$  und  $C_3$  linearen Bestimmungsgleichungen

$$C_1 - C_2 + C_3 \operatorname{tg} \sigma = 0 \dots (33),$$

$$\left. \begin{aligned} & C_1 (J_{1U} \lambda^2 - g m_1 h_1) + C_2 (J_{2U} \lambda^2 - g m_2 h_2) + \\ & + C_3 \left\{ -\frac{J_{1UV}}{l} (c_2 \lambda^2 + v \lambda) - \frac{J_{2UV}}{l} (c_1 \lambda^2 + v \lambda) - \right. \\ & - \frac{\lambda}{l} (c_1 N_2 + c_2 N_1) - \frac{v}{l} (N_1 + N_2) - \\ & - \frac{v}{l} [\lambda (m_1 h_1 c_2 + m_2 h_2 c_1) + v (m_1 h_1 + m_2 h_2)] + \\ & \left. + g \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) (c_1 - r) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} (34),$$

$$\left. \begin{aligned} & C_1 [-c_2 \lambda^2 (J_{1UV} \cos \sigma + J_{1U} \sin \sigma) + c_2 N_1 \lambda \cos \sigma + g c_2 m_1 s_1] + \\ & + C_2 [-c_1 \lambda^2 (J_{2UV} \cos \sigma + J_{2U} \sin \sigma) + c_1 N_2 \lambda \cos \sigma + g c_1 m_2 s_2] + \\ & + C_3 \left\{ \lambda^2 \left[ \frac{c_2^2}{l} (J_{1V} \cos \sigma + J_{1UV} \sin \sigma) + \frac{c_1^2}{l} (J_{2V} \cos \sigma + J_{2UV} \sin \sigma) \right] + \lambda v \left[ \frac{c_2}{l} (J_{1V} \cos \sigma + J_{1UV} \sin \sigma) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{c_1}{l} (J_{2V} \cos \sigma + J_{2UV} \sin \sigma) \right] + \frac{\lambda}{l} (N_2 c_1^2 + N_1 c_2^2) \sin \sigma + \frac{v}{l} (c_2 N_1 + c_1 N_2) \sin \sigma + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda v}{l} (c_2^2 m_1 s_1 + c_1^2 m_2 s_2) + \frac{v^2}{l} (c_2 m_1 s_1 + c_1 m_2 s_2) - g c_1 c_2 \left( m_2 \frac{r_2}{l} - m_1 \frac{r_1}{l} \right) \sin \sigma \right\} = (c_1 - c_2) M_D \end{aligned} \right\} (35).$$

Gl. (35) ist inhomogen, da in ihr die konstante Reibungsdämpfung auftritt. Die Dämpfung wird jedoch zunächst gleich null gesetzt, d. h. es sei die Fahrt ohne Benutzung des Steuerdämpfers betrachtet.

Nunmehr werden Gl. (33) bis (35) durch Einführen einer reduzierten Frequenz  $\Omega$  und einer reduzierten Zeit  $\tau$  als

$$\Omega = \lambda l/v, \quad \tau = v t/l \dots (36)$$

dimensionslos gemacht. Dadurch erfaßt man nach dem Einsetzen der Zahlenwerte nicht nur eine, sondern alle Maschinen mit gleichen Massen-, Trägheits-, Längen- und Kreiselverhältnissen. Da sich das System unter der Einwirkung der Schwerkraft bewegt, tritt in den Gleichungen die Froudezahl  $Fr = v/\sqrt{g l}$  auf.

In der weiteren Rechnung werden folgende Abkürzungen und Verhältniswerte verwendet:

$$f = 1/Fr^2 = g l/v^2,$$

$$M = m_1/m_2 \text{ als Massenverhältnis,}$$

$$K_{1U} = k_{1U}/l, \quad K_{1V} = k_{1V}/l, \quad K_{1UV} = k_{1UV}/l,$$

$$K_{2U} = k_{2U}/l, \quad K_{2V} = k_{2V}/l, \quad K_{2UV} = k_{2UV}/l$$

als Trägheitsverhältnisse (mit  $k = \sqrt{J/m}$  als Länge des Trägheitsarmes,  $J = J_{1U}, J_{1V}, J_{1UV}, J_{2U}, J_{2V}$  oder  $J_{2UV}$ ,  $m = m_1$  oder  $m_2$ , Index 1 und 2 für das Vorder- bzw. Hinterradsystem, Index  $U$  und  $V$  für aus dem Trägheitsmoment um die  $U$ - bzw.  $V$ -Achse erhaltene Werte, Index  $UV$  für aus dem Zentrifugalmoment in der  $U, V$ -Ebene erhaltene Werte). Die beiden Räder haben an sich das gleiche Trägheitsmoment  $J_1$ , jedoch ist nach Abschnitt 1.4 zum Trägheitsmoment des Hinterrades das Trägheitsmoment  $J_{\text{mot}}$  des Motors zu addieren; also gilt  $J_2 = J_1 + J_{\text{mot}}$ . Die Rechnung wird am einfachsten, wenn man den Trägheitshalbmesser  $k_R = \sqrt{J_1/m_{1R}}$  des Rades ohne Motor mit  $m_{1R}$  als reduzierter Masse des Vorderrades (d. h. des Rades allein) beibehält und eine reduzierte Masse  $m_{2R}$  für das Hinterrad mit Motor einführt, die dann

$$m_{2R} = (J_1 + J_{\text{mot}})/k_R^2 = J_2/k_R^2$$

beträgt. Weiterhin wurden in der dimensionslosen Darstellung als Bezeichnungen eingeführt:

$$M_{1k} = m_{1R}/m_2, \quad M_{2k} = m_{2R}/m_2$$

als Kreiselmassenverhältnisse der beiden Systeme,  $K_R = k_R/\sqrt{l R}$  als Kreiselträgheitsverhältnis mit  $R$  als dem für beide Räder gleichen Arbeitshalbmesser und



$$H_1 = h_1/l, \quad H_2 = h_2/l, \quad C_1^* = c_1/l, \quad C_2^* = c_2/l, \\ R_1^* = r_1/l, \quad R_2^* = r_2/l, \quad R^* = r/l, \quad S_1 = s_1/l, \quad S_2 = s_2/l$$

als Längenverhältnissen. Es ist ferner nach Gl. (14)

$$N_1 = m_{1R} k_R^2 v/R, \quad N_2 = m_{2R} k_R^2 v/R.$$

Während Gl. (33) erhalten bleibt, gehen nun Gl. (34) und (35) über in:

$$\alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2 + \alpha_{13} C_3 = 0 \dots \dots \dots (37)$$

bzw. für  $M_D = 0$  entsprechend

$$\alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2 + \alpha_{23} C_3 = 0 \dots \dots \dots (38)$$

mit

$$\alpha_{11} = M (K_{1U}^2 \Omega^2 - f H_1), \\ \alpha_{12} = K_{2U}^2 \Omega^2 - f H_2, \\ \alpha_{13} = -M K_{1UV}^2 \Omega (C_2^* \Omega + 1) - K_{2UV}^2 \Omega (C_1^* \Omega + 1) - \\ - \Omega K_R^2 (C_1^* M_{2k} + C_2^* M_{1k}) - K_R^2 (M_{1k} + M_{2k}) - \\ - \Omega (C_2^* H_1 M + C_1^* H_2) - (M H_1 + H_2) + \\ + f (R_2^* - M R_1^*) (C_1^* - R^*), \\ \alpha_{21} = -\Omega^2 C_2^* M (K_{1U}^2 \sin \sigma + K_{1UV}^2 \cos \sigma) + \\ + \Omega C_2^* M_{1k} K_R^2 \cos \sigma + f M C_2^* S_1, \\ \alpha_{22} = -\Omega^2 C_1^* (K_{2U}^2 \sin \sigma + K_{2UV}^2 \cos \sigma) + \\ + \Omega C_1^* M_{2k} K_R^2 \cos \sigma + f C_1^* S_2 \quad \text{und} \\ \alpha_{23} = \Omega^2 [C_2^{*2} M (K_{1V}^2 \cos \sigma + K_{1UV}^2 \sin \sigma) + \\ + C_1^{*2} (K_{2V}^2 \cos \sigma + K_{2UV}^2 \sin \sigma)] + \Omega [C_2^* M (K_{1V}^2 \cos \sigma + \\ + K_{1UV}^2 \sin \sigma) + C_1^* (K_{2V}^2 \cos \sigma + K_{2UV}^2 \sin \sigma) + \\ + K_R^2 \sin \sigma (C_1^{*2} M_{2k} + C_2^{*2} M_{1k})] + \\ + K_R^2 \sin \sigma (C_2^* M_{1k} + C_1^* M_{2k}) + \Omega (M C_2^{*2} S_1 + C_1^{*2} S_2) + \\ + M C_2^* S_1 + C_1^* S_2 - f C_1^* C_2^* (R_2^* - M R_1^*) \sin \sigma.$$

Das System der drei nunmehr homogenen, linearen Gleichungen, Gl.(33), (37) und (38), hat nur Lösungen, wenn die Koeffizienten-Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 1 & -1 & \text{tg } \sigma \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (39)$$

wird. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Gleichung vierten Grades für  $\Omega$ , weil die Summe der Ordnungen der Differentialgleichungen gleich 4 ist. Es bestehen also zwei Schwingungen des Systems. Sie sind stabil, wenn alle vier Wurzeln komplexe Werte mit negativem Realteil haben. In diesem Fall ergeben sich zwei gedämpfte Schwingungen. Treten dagegen zwei reelle Wurzeln auf, so bleibt die Bewegung stabil, wenn diese negativ sind.

Die Auswertung der Koeffizienten-Determinante führt zu einer Gleichung für  $\Omega$  von der Form

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_4 \Omega^4 + \varepsilon_3 \Omega^3 + (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{22} f) \Omega^2 + \\ + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} f) \Omega + (\varepsilon_{01} f - \varepsilon_{02}) f = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (40)$$

mit den  $\varepsilon$ -Größen als Fahrzeugkonstanten. Die explizite Darstellung der Wurzeln dieser algebraischen

Gleichung vierten Grades in Abhängigkeit von  $f$  ist praktisch nicht möglich. Deshalb muß die Zahlenrechnung bereits bei der Determinante begonnen werden. Dazu sind die Abmessungen des Kraftrades und seine Trägheitsmomente zu ermitteln.

## 2. Anwendungen

### 2.1 Berechnung der Eigenschwingungen von Versuchsmaschinen

Die Trägheitsmomente des Vorderradsystems und der Räder einiger Maschinen wurden mit Hilfe der bifilaren Aufhängung, die Trägheitsmomente des Rahmens mit dem Fahrer auf einem Drehschwingtisch um die einzelnen Drehachsen ausgependelt. Die Untersuchungen erstreckten sich auf drei typische Einspurfahrzeuge: einen Roller (Vespa), ein leichtes Kraftrad (Dürkopp MD 150) und ein schweres Kraftrad (BMW R 51/3) mit und ohne Beifahrer. Die Darstellung des Trägheitsellipsoids dieser Maschinen in der Radebene zeigen Bild 4 bis 6; Tafel 1 enthält die Grundgrößen.

Diese Grundgrößen sind nun in die Koeffizientendeterminante, Gl. (39), einzusetzen. Die beim Ausrechnen von Gl. (39) entstehende Gleichung vierten Grades für die vier Wurzeln  $\Omega_1$  bis  $\Omega_4$  von  $\Omega$  enthält  $f$  als Parameter. Sie lautet für den Vespa-Roller:

$$\Omega^4 + 18,9 \Omega^3 + (16,7 - 17,6 f) \Omega^2 + (6,79 - 12,8 f) \Omega + (1,64 f - 1,53) f = 0,$$

für die Dürkopp-Maschine, Bauart MD 150:

$$\Omega^4 + 3,9 \Omega^3 + (4,65 - 6,75 f) \Omega^2 + (3,38 - 4,74 f) \Omega + (6,34 f - 1,32) f = 0,$$

für die BMW-Maschine, Bauart R 51/3, im Solobetrieb:

$$\Omega^4 + 4 \Omega^3 + (5,59 - 5,61 f) \Omega^2 + (3,08 - 3,84 f) \Omega + (6,02 f - 1,05) f = 0$$

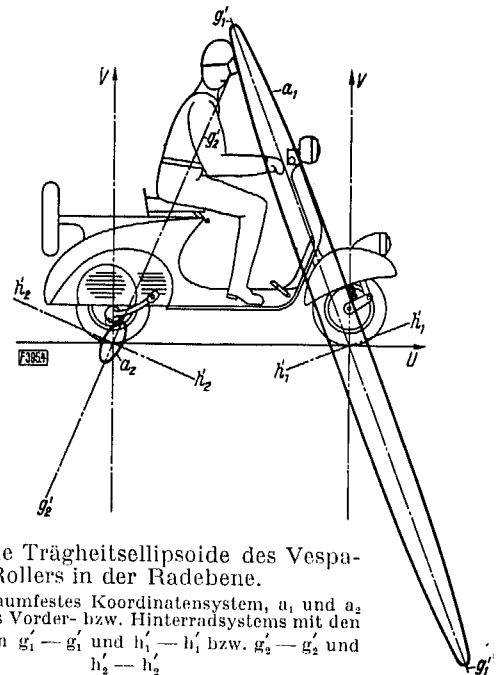
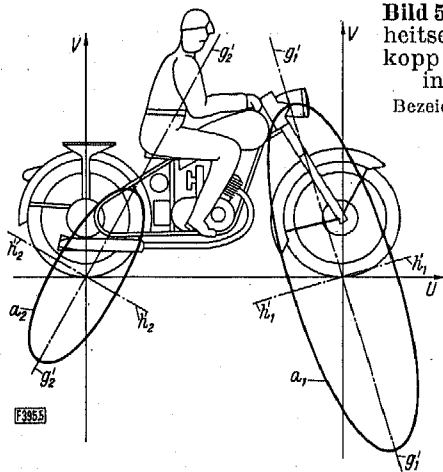
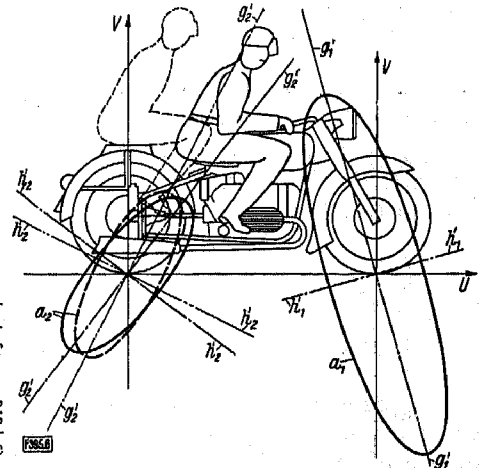


Bild 4. Die Trägheitsellipsoide des Vespa-Rollers in der Radebene.

$U$  und  $V$  raumfestes Koordinatensystem,  $a_1$  und  $a_2$  Ellipsoid des Vorder- bzw. Hinterradsystems mit den Hauptachsen  $g_1 - g_1'$  und  $h_1 - h_1'$  bzw.  $g_2 - g_2'$  und  $h_2 - h_2'$



**Bild 5.** (links). Die Trägheitsellipse der Dürkopp-MD150-Maschine in der Radebene.  
Bezeichnungen wie in Bild 4



**Bild 6.** (rechts). Die Trägheitsellipse der BMW-R 51/3-Maschine in der Radebene.  
Bezeichnungen wie in Bild 4, ausgezogen bei Solobetrieb; bei Betrieb mit Beifahrer (gestrichelt) gilt die gestrichelte Kurve  $a_2$ .

bzw. im Beifahrer-Betrieb:

$$\Omega^4 + 4,48 \Omega^3 + (5,76 - 5,68 f) \Omega^2 + (2,36 - 3,59 f) \Omega + (5,44 f - 0,803) f = 0.$$

Nach dem Einsetzen von  $f$  wurden die Wurzeln von  $\Omega$  durch Iterieren gefunden und in Tafel 2 zusammengestellt. Es ergaben sich in allen Fällen zwei reelle und zwei komplexe Wurzeln. Man erkennt, daß nur

in dem schmalen Bereich von  $v \approx 20$  bis  $30$  km/h bei den Kraffrädern und  $v \approx 30$  bis  $40$  km/h bei dem Roller völlige Stabilität auftritt.

Die vier Wurzeln  $\Omega_1$  bis  $\Omega_4$  setzt man nun in Gl. (33), (37) und (38) ein und erhält daraus die Konstanten  $C_1$  bis  $C_3$ . Mit  $\Omega_1$  ergeben sich  $C_{11}$ ,  $C_{21}$  und  $C_{31}$ , mit  $\Omega_2$  entsprechend  $C_{12}$ ,  $C_{22}$  und  $C_{32}$  usw. Unter Benutzung der Ansätze nach Gl. (32) folgt durch Summenbildung

**Tafel 1.** Grundgrößen der untersuchten Maschinen.

Bezeichnung		Vespa-Roller	Dürkopp MD 150	BMW R 51/3 Solo	BMW R 51/3 mit Beifahrer	
Masse des Vorderradsystems	$m_1$	kg s <sup>2</sup> /cm	0,01424	0,02242	0,03711	0,03711
Schwerpunkthöhe des Vorderradsystems	$h_1$	cm	36,3	49,3	54,2	54,2
waagerechter Abstand des Schwerpunktes vom Aufstandspunkt (Vorderrad)	$r_1$	cm	7,0	11,4	13,2	13,2
Nachlauf	$e_1$	cm	8,5	10,5	8	8
Abstand des Schwerpunktes von der Steuerachse-parallel durch den Aufstandspunkt (Vorderrad)	$s_1$	cm	4,44	12,6	12,7	12,7
Trägheitsmoment um die V-Achse (Vorderrad)	$J_{1V}$	kg cm s <sup>2</sup>	4	11,6	20,2	20,2
Trägheitsmoment um die U-Achse (Vorderrad)	$J_{1U}$	kg cm s <sup>2</sup>	28	69	135	135
Zentrifugalmoment in der U-, V-Ebene (Vorderrad)	$J_{1UV}$	kg cm s <sup>2</sup>	- 10,5	- 18,1	- 36,4	- 36,4
Trägheitsmoment des Vorderrades um die Radachse $J_1$		kg cm s <sup>2</sup>	0,84	4,6	6,5	6,5
Masse des Hinterradsystems	$m_2$	kg s <sup>2</sup> /cm	0,1588	0,1464	0,2161	0,2861
Schwerpunkthöhe des Hinterradsystems	$h_2$	cm	60,2	70,2	55,0	62,9
waagerechter Abstand des Schwerpunktes vom Aufstandspunkt (Hinterrad)	$r_2$	cm	31,3	43,3	52,4	44,1
Abstand des Durchstichpunktes der Steuerachse vom hinteren Aufstandspunkt	$e_2$	cm	125,8	139,5	151	151
Abstand des Schwerpunktes von der Steuerachse (Hinterrad)	$s_2$	cm	48,3	70,8	71,8	68,0
Trägheitsmoment um die V-Achse (Hinterrad)	$J_{2V}$	kg cm s <sup>2</sup>	340	360	720	720
Trägheitsmoment um die U-Achse (Hinterrad)	$J_{2U}$	kg cm s <sup>2</sup>	1210	850	1110	2100
Zentrifugalmoment in der U-, V-Ebene (Hinterrad)	$J_{2UV}$	kg cm s <sup>2</sup>	440	400	670	850
Trägheitsmoment von Hinterrad und Motor	$J_2$	kg cm s <sup>2</sup>	1,5	6,0	6,5	6,5
Radstand	$l$	cm	117,3	129,0	143	143
Arbeitshalbmesser des Rades	$R$	cm	17,8	30,7	32,4	32,4
Steuerwinkel	$\sigma$	Grad	21	27,5	26,9	26,9
waagerechter Abstand des Angriffspunktes der Reaktionskräfte vom Aufstandspunkt	$r$	cm	2,41	5,43	6,46	5,56
Trägheitshalbmesser des Rades	$k_R$	cm	14,2	21,2	23	23
Masse des Vorderrades	$m_{1R}$	kg s <sup>2</sup> /cm	0,00415	0,0102	0,0125	0,0125
reduzierte Masse des Hinterrades mit Motor	$m_{2R}$	kg s <sup>2</sup> /cm	0,0074	0,0133	0,0125	0,0125



$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= A C_{11} e^{\Omega_1 \tau} + B C_{12} e^{\Omega_2 \tau} + C C_{13} e^{\Omega_3 \tau} + \\ &+ D C_{14} e^{\Omega_4 \tau} \end{aligned} \right\} \dots (41),$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 &= A C_{21} e^{\Omega_1 \tau} + B C_{22} e^{\Omega_2 \tau} + C C_{23} e^{\Omega_3 \tau} + \\ &+ D C_{24} e^{\Omega_4 \tau} \end{aligned} \right\} \dots (42),$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A C_{31} e^{\Omega_1 \tau} + B C_{32} e^{\Omega_2 \tau} + C C_{33} e^{\Omega_3 \tau} + \\ &+ D C_{34} e^{\Omega_4 \tau} \end{aligned} \right\} \dots (43).$$

Die vier Konstanten  $A, B, C$  und  $D$  wurden eingeführt, damit man für  $\tau = 0$  die Anfangsbedingungen  $\vartheta_1 = \vartheta_1(0), \dot{\vartheta}_1 = d\vartheta_1/d\tau = \dot{\vartheta}_1(0), \psi = \psi(0)$  und  $\dot{\psi} = d\psi/d\tau = \dot{\psi}(0)$  erfüllen kann. Der Neigungswinkel  $\vartheta_2$  folgt aus den Werten von  $\vartheta_1$  und  $\psi$  nach der kinematischen Bedingung, Gl. (29).

Bei einer Geschwindigkeit von  $v = 90$  km/h lautet z. B. die Gleichung für die Seitenneigung des Rahmenteiltes beim Vespa-Roller

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 &= A C_{21} e^{-0,46\tau + 0,41i\tau} + B C_{22} e^{-0,46\tau - 0,41i\tau} + \\ &+ C C_{23} e^{-18,1\tau} + D C_{24} e^{0,0047\tau} \end{aligned} \right\} (44)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 &= e^{-0,46\tau} [(A C_{21} + B C_{22}) \cos(0,4\tau) + \\ &+ (A C_{21} - B C_{22}) i \sin(0,4\tau)] + C C_{23} e^{-18,1\tau} + \\ &+ D C_{24} e^{0,0047\tau} \end{aligned} \right\} (45).$$

Die Bewegung setzt sich also aus drei wesentlichen Anteilen zusammen: einer gedämpften Schwingung, einem mit der Zeit sehr schnell gegen null gehenden und einem langsam anwachsenden Glied.

**2.2 Das Amplitudenverhältnis**

Aus Gl. (32) kann das Amplitudenverhältnis der Schräglage des Rahmenteiltes und des Lenkeinschlages (gemessen auf der Fahrbene) gebildet werden:

$$C_2/C_3 = \vartheta_2/\psi \dots (46).$$

Setzt man  $C_1$  aus Gl. (33) in Gl. (37) ein, so folgt

$$C_2/C_3 = -(\alpha_{13} - \alpha_{11} \operatorname{tg} \sigma) / (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \dots (47).$$

Beim Einsetzen von Zahlenwerten entstehen Gleichungen, in denen noch der Parameter  $f$  und  $\Omega(f)$  vorkommen, z. B. für den Vespa-Roller:

$$\frac{C_2}{C_3} = \frac{-1,45 \cdot 10^{-2} \Omega^2 - 2,82 \cdot 10^{-1} \Omega - 5,48 \cdot 10^{-1} + 3,04 \cdot 10^{-2} f}{5,64 \cdot 10^{-1} \Omega^2 - 5,41 \cdot 10^{-1} f}$$

Für die komplexen Werte  $\Omega_1 = -\alpha + i\beta$  und  $\Omega_2 = -\alpha - i\beta$  erhält man auch komplexe Amplitudenverhältnisse von der Form

$$C_2/C_3 = -E + iF \dots (48).$$

Wählt man also z. B. in Gl. (43)  $A C_{31} = 1$  und  $B C_{32} = 0$ , so daß  $\Omega_1$  die Schwingung bestimmt, so ist die Teilbewegung des Lenkeinschlages, die sich in der Form einer gedämpften Schwingung vollzieht, durch

$$\psi = e^{(-\alpha + i\beta)\tau} = e^{-\alpha\tau} [\cos(\beta\tau) + i \sin(\beta\tau)] \quad (49)$$

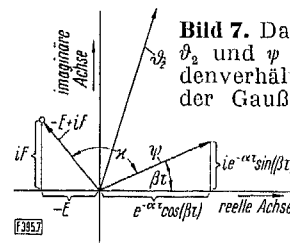
**Tafel 2.** Wurzeln der reduzierten Frequenz  $\Omega$ .

Froudezahl Fr	Geschwindigkeit $v$		Wurzel		
	km/h	cm/s	$\Omega_1$ und $\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
Vespa-Roller					
7,37	90	$2,5 \cdot 10^3$	$-0,46 \pm 0,41 i$	$-18,1$	0,0047
4,9	60	$1,67 \cdot 10^3$	$-0,45 \pm 0,41 i$	$-18,1$	0,0056
3,27	39,92	$1,109 \cdot 10^3$	$-0,41 \pm 0,37 i$	$-18,2$	0
2,46	30	$8,33 \cdot 10^2$	$-0,35 \pm 0,31 i$	$-18,1$	-0,049
1,64	20	$5,55 \cdot 10^2$	$0,037 \pm 0,38 i$	$-18,4$	-0,0625
0,82	10	$2,78 \cdot 10^2$	$0,85 \pm 0,82 i$	$-19,4$	-0,125
Dürkopp-Maschine, Bauart MD 150					
7,03	90	$2,5 \cdot 10^3$	$-0,6 \pm 0,91 i$	$-2,71$	0,006
4,7	60	$1,67 \cdot 10^3$	$-0,57 \pm 0,895 i$	$-2,76$	0,012
2,34	30	$8,33 \cdot 10^2$	$-0,48 \pm 0,82 i$	$-3,15$	0
1,56	20	$5,55 \cdot 10^2$	$0,038 \pm 0,62 i$	$-3,5$	-0,49
0,786	10	$2,78 \cdot 10^2$	$1,24 \pm 0,76 i$	$-4,0$	-1,46
BMW-Maschine, Bauart R 51/3, im Solobetrieb					
8,9	120	$3,33 \cdot 10^3$	$-0,95 \pm 0,74 i$	$-2,11$	0,0041
6,68	90	$2,5 \cdot 10^3$	$-0,93 \pm 0,74 i$	$-2,15$	0,0068
4,45	60	$1,667 \cdot 10^3$	$-0,88 \pm 0,735 i$	$-2,26$	0,013
2,4	32,3	$8,97 \cdot 10^2$	$-0,69 \pm 0,67 i$	$-2,65$	0
1,85	25	$6,941 \cdot 10^2$	$-0,49 \pm 0,53 i$	$-2,9$	-0,136
1,12	15,09	$4,19 \cdot 10^2$	$0,41 \pm 0,74 i$	$-3,65$	-1,15
BMW-Maschine, Bauart R 51/3, im Beifahrer-Betrieb					
8,9	120	$3,33 \cdot 10^3$	$-0,9 \pm 0,24 i$	$-2,68$	0,004
6,68	90	$2,5 \cdot 10^3$	$-0,9 \pm 0,27 i$	$-2,72$	0,0066
4,45	60	$1,667 \cdot 10^3$	$-0,85 \pm 0,31 i$	$-2,82$	0,0012
2,6	35,09	$9,742 \cdot 10^2$	$-0,7 \pm 0,23 i$	$-3,08$	0
1,85	25	$6,941 \cdot 10^2$	$-0,2 \pm 0,24 i$	$-3,38$	-0,72
1,12	15	$4,167 \cdot 10^2$	$0,45 \pm 0,65 i$	$-4,57$	-0,97

gegeben. Die Schräglage des Rahmens ergibt sich dann nach Gl. (42) mit  $\psi$  nach Gl. (49) gemäß

$$\vartheta_2 = (-E + iF) \psi \dots (50).$$

Wenn man die Schwingung des Lenksystems als umlaufenden Vektor in der Gaußschen Zahlenebene darstellt, Bild 7, so hat man diesen Vektor mit dem Wert  $(-E + iF)$  zu multiplizieren und erhält dann einen zweiten Vektor für die zugehörige Schwingung des Rahmensystems um die Spurlinie.

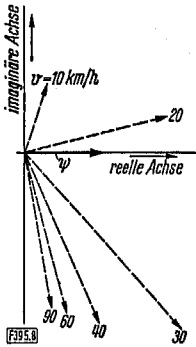


**Bild 7.** Darstellung der Winkel  $\vartheta_2$  und  $\psi$  sowie des Amplitudenverhältnisses  $-E + iF$  in der Gaußschen Zahlenebene. Erklärungen im Text

Wie aus Bild 7 hervorgeht, ist die Schwingung in der Schräglage (d. h. der Winkel  $\vartheta_2$ ) gegenüber der Lenkschwingung (durch den Winkel  $\psi$  bestimmt) um einen Winkel  $\kappa$  gemäß

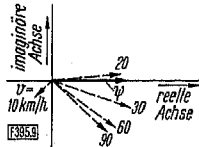
$$\operatorname{tg} \kappa = F/E \dots (51)$$

phasenverschoben. Das Verhältnis der Größtaus-

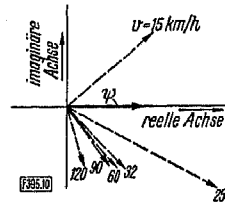


**Bild 8.** Amplitudenverhältnis  $\delta_2/\psi$  für den Vespa-Roller bei verschiedenen Fahrgeschwindigkeiten  $v$ .

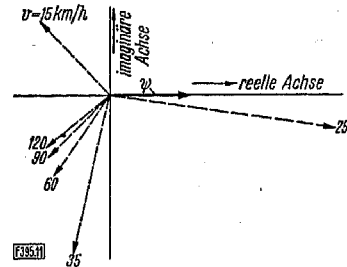
Gestrichelte Vektoren für  $\delta_2/\psi$  mit  $\psi = 1$



**Bild 9.** Amplitudenverhältnis  $\delta_2/\psi$  für die Dürkopp-MD150-Maschine bei verschiedenen Fahrgeschwindigkeiten  $v$ . Erklärung wie bei Bild 8



**Bild 10.** Amplitudenverhältnis  $\delta_2/\psi$  für die BMW-R51/3-Maschine im Solo-Betrieb bei verschiedenen Fahrgeschwindigkeiten  $v$ . Erklärung wie bei Bild 8



**Bild 11.** Amplitudenverhältnis  $\delta_2/\psi$  für die BMW-R51/3-Maschine im Beifahrer-Betrieb bei verschiedenen Fahrgeschwindigkeiten  $v$ . Erklärung wie bei Bild 8

schläge gibt der Betrag  $\sqrt{E^2 + F^2}$  an, um den der die Schräglagenschwingung darstellende Vektor größer ist als der gleich 1 gesetzte Vektor der Lenkschwingung. Die beiden reellen Wurzeln  $\Omega_3$  und  $\Omega_4$  ergeben ebenfalls reelle Amplitudenverhältnisse. Bild 8 bis 11 zeigen das Amplitudenverhältnis  $\delta_2/\psi$  und die Phasenverschiebung in der Gaußschen Zahlenebene für die untersuchten Maschinen, bezogen auf  $\psi = 1$ .

**2.3 Der Bewegungsablauf**

An Hand der vorstehenden Ergebnisse wird nun der Bewegungsablauf von Einspurfahrzeugen in der Nähe der Gleichgewichtslage ohne Eingreifen des Fahrers betrachtet. Drei charakteristische Bewegungsformen bestimmen diesen Ablauf: die komplexen Werte  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  stellen eine Schwingung dar, die negative reelle Wurzel  $\Omega_3$  bedingt eine sehr schnelle Ausschlagverkleinerung und die kleine positive Wurzel  $\Omega_4$  eine langsame Vergrößerung des Ausschlages (oder bei kleiner Geschwindigkeit, bei der auch  $\Omega_4$  negativ wird, eine Verkleinerung des Anfangsauschlages).

Man unterscheidet zweckmäßig drei Geschwindigkeitsbereiche. Im untersten Bereich ist die Bewegung instabil. Bei sehr niedriger Geschwindigkeit (1 bis 5 km/h) ergeben sich an Stelle der komplexen zwei positive reelle Wurzeln. Die beiden Systeme fallen also, sich selbst überlassen, infolge der Schwerkraft um. Zahlenwerte wurden in diesem Bereich nicht ermittelt. Bei etwas höherer Geschwindigkeit erhalten die beiden komplexen Wurzeln einen positiven Realteil; es bildet sich also eine angefachte Schwingung aus. Zunächst ist der Realteil der Wurzeln so groß, daß es zu keiner periodischen Bewegung kommen kann. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird der Realteil aber immer kleiner, und es entsteht mehr und mehr eine Schwingung. Bei einer Geschwindigkeit, die bei heute üblichen Einspurfahrzeugen zwischen 15 bis 30 km/h liegt, durchläuft der vorher positive und die Instabilität im untersten Geschwindigkeitsbereich verursachende Dämpfungsfaktor den Nullwert und nimmt danach ein negatives Vorzeichen an. Hier liegt die Grenze zum nächsten Geschwindigkeitsbereich.

Die beiden reellen Wurzeln haben im untersten Bereich ein negatives Vorzeichen. Der negative Wert

für  $\Omega_3$  bleibt im oberen Geschwindigkeitsbereich praktisch konstant. Das einem Störausschlag folgende Zurückschnellen mit der absoluten Größe der Frequenz  $\lambda = \Omega_3 v/l$  nach Gl. (36) vollzieht sich also mit zunehmender Geschwindigkeit immer rascher. Die kleine negative Wurzel  $\Omega_4$  nähert sich mit zunehmender Geschwindigkeit mehr und mehr dem Nullwert, den sie bei den üblichen Fahrwerken mit 32 bis 42 km/h erreicht. Im zweiten Geschwindigkeitsbereich ergibt sich daher die Stabilität der Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage.

Mit dem Nulldurchgang der kleinen Wurzel  $\Omega_4$  endet der mittlere Geschwindigkeitsbereich, da die Wurzel von nun an kleine positive Werte erhält. Sie bedeuten ein langsames Umkippen des Kraftrades. Zwar werden diese positiven Werte später bei höherer Geschwindigkeit wieder etwas kleiner; sie gehen aber nicht auf null zurück. Der Dämpfungsfaktor (Realteil von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ ) und die dimensionslose Frequenz (Imaginärteil von  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ ) sind im oberen Geschwindigkeitsbereich von etwa 50 km/h ( $Fr \approx 4$ ) ab nahezu konstant. Die entsprechenden absoluten Größen wachsen also wieder linear mit der Geschwindigkeit (vgl. Gl. (36)). Daraus folgt, daß auch die Wellenlänge  $L$  in der Fahrspur nach

$$L = (2\pi/\nu) v \dots \dots \dots (52)$$

mit  $\nu$  als der absoluten Frequenz (Imaginärteil von  $\lambda = \Omega v/l$ ) bei Geschwindigkeiten von mehr als 50 km/h konstant bleibt.

Würde man die Reifen des Kraftrades mit Stempeltinte bestreichen, so hinterließe die Maschine im obersten Geschwindigkeitsbereich stets das gleiche Schwingungsbild auf der Fahrbahn, unabhängig davon, ob z. B.  $v = 60$  km/h oder  $v = 260$  km/h beträgt. Die wenn auch nur kleine Instabilität im dritten Geschwindigkeitsbereich mag zunächst etwas überraschen, da man erfahrungsgemäß bei höherer Geschwindigkeit besonders leicht freihändig fahren kann. Einmal aufmerksam geworden, spürt jedoch jeder Fahrer sehr deutlich, wie er beim Freihändigfahren mit  $v \geq 40$  km/h das Gewicht dauernd auf die eine oder die andere Seite verlagern muß, weil sich die Maschine langsam neigt. Entsprechend der sehr langsamen Ausschlagvergrößerung spielt sich dieser Ausgleich im Zeitraum von etwa 4 bis 10 s ab.

Die kleine positive Wurzel  $\Omega_4$ , der Ausdruck für die Instabilität, entsteht dadurch, daß der Faktor  $(\epsilon_{01} f - \epsilon_{02}) f$  in Gl. (40) mit wachsender Geschwindigkeit  $v$  (also mit kleiner werdendem  $f$ ) wegen des ne-

gativen Vorzeichens von  $\varepsilon_{02}$  negative Werte annimmt. Das Glied  $\varepsilon_{02} f$  entspricht in der Bewegungsgleichung, Gl. (31), den Gliedern mit dem Faktor  $v^2 \psi$ . Diese Glieder sind aber erst durch Einführen der Beziehung  $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$  und der nichtholonomen Gl. (4) entstanden. Anschaulich bedeutet dies, daß sich während der Fahrt das Hinterrad nach einem Lenkeinschlag ständig der Spur des Vorderrades wieder nähert, da es in einer Achse in der Vorderradebene angelenkt wird, der Winkel  $\psi$  also fortlaufend abnimmt. Führt man das Vorderrad nach einem Lenkeinschlag auf einer Geraden, so läuft das Hinterrad asymptotisch in die Spur des Vorderrades nach Art einer Traktrix ein. Je größer die Geschwindigkeit ist, um so schneller vollzieht sich diese Annäherung und damit die Verkleinerung von  $\psi$ . Läßt man  $v = \infty$  werden, so wird nach Gl. (4) mit  $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$  der Winkel  $\psi = 0$ , sofern die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_1$  und  $\dot{\varphi}_2$  endliche Werte behalten. Mit  $\psi = 0$  aber wäre die Möglichkeit eines Lenkeinschlages aufgehoben, auf der natürlich die Stabilisierung beruht.

Es sei noch erwähnt, daß sich mit kleinerem  $\sigma$ , also steilerem Steuerwinkel, diese Instabilität verringert und sogar ganz beseitigt werden kann (es wird dann das letzte Glied in Gl. (40)  $(\varepsilon_{01} f + \varepsilon_{02}) f$ ). Jedoch nimmt durch diese Maßnahme auch der Dämpfungsfaktor der komplexen Wurzel ab, auf den es wegen der Gefahr des Lenkungsflatterns viel mehr ankommt als auf die kleine, völlig ungefährliche Instabilität im oberen Geschwindigkeitsbereich.

Mit Hilfe des Amplitudenverhältnisses kann man den Anteil der Schräglage und des Lenkeinschlages an den drei charakteristischen Bewegungen erkennen. Der Anteil der Kippbewegung an dem von  $\Omega_3$  bestimmten Zurückschnellen ist bei hohen Geschwindigkeiten verschwindend klein; er wird mit abnehmendem  $v$  etwas größer. Diese schnelle Bewegung vollführt also fast ausschließlich das leichtere Vorderradsystem auf Grund des Lenkeinschlages. Umgekehrt verhält sich das Kraftrad beim langsamen Umkippen auf Grund der kleinen Werte von  $\Omega_4$ . Hier gibt das Kippen des Rahmensystems den Ausschlag; der Lenkeinschlag nimmt praktisch nur im unteren Geschwindigkeitsbereich an der Bewegung teil. Schließlich ist die vom komplexen Amplitudenverhältnis bestimmte Phasenverschiebung der Schwingungsbewegung zu betrachten. Im untersten Geschwindigkeitsbereich eilt die Schräglage dem Lenkeinschlag voraus. Im mittleren Geschwindigkeitsbereich jedoch beginnt die Schräglage (zwischen 20 bis 30 km/h) hinter dem Lenkeinschlag zurückzubleiben, und mit zunehmender Geschwindigkeit eilt sie mehr und mehr nach. Das Amplitudenverhältnis erreicht einen Maximalwert bei 25 bis 30 km/h. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird es etwas, mit abnehmender beträchtlich kleiner. Beim GrößtWert übersteigt die Amplitude der Schräglage die des Lenkeinschlages um das 2- bis 3fache.

#### 2.4 Vergleich der Versuchsmaschinen

Zum Vergleich der Ergebnisse für die einzelnen Versuchsmaschinen wurden die Wurzeln  $\Omega_1$  bis  $\Omega_4$  über der Froudezahl  $Fr$  aufgetragen, Bild 12 bis 15. Bemerkenswert ist, daß alle Kurven im oberen Geschwindigkeitsbereich nahezu konstant verlaufen.

Die wichtigsten Größen sind die Frequenz und der Dämpfungsfaktor, da Schwingungserscheinungen bei hoher Geschwindigkeit die Hauptgefahr bilden. Für den Vespa-Roller hat der Dämpfungsfaktor (vgl. Bild 12) den kleinsten Absolutwert, dann folgen die Dürkopp-MD 150-Maschine und mit beträchtlich größerem absoluten Dämpfungswert die BMW-R 51/3-Maschine im Solobetrieb. Der Beifahrer wirkt sich bei der schweren Maschine nur in einer mäßigen Verkleinerung des absoluten Betrages vom Dämpfungsfaktor aus. Zweifellos ist ein möglichst hoher Absolutwert des Dämpfungsfaktors erwünscht und bei der Auslegung von Fahrwerken anzustreben. Dies allein reicht jedoch nicht zur Sicherung guter Fahreigenschaften aus, denn gerade bei der Maschine mit der größten Dämpfung wurde Flatterneigung beobachtet und gemessen.

Die Frequenz der Eigenschwingungen (vgl. Bild 13) liegt bei der Dürkopp-Maschine am höchsten. Große Kreiselkräfte im Verhältnis zur Fahrzeugmasse sind die Ursache hierfür. Die Frequenz der BMW-R 51/3-Maschine im Solobetrieb hat rd. 27% kleinere Endwerte, während die des Vespa-Rollers nur knapp die Hälfte der Frequenz der Dürkopp-Maschine erreicht. Der Beifahrer-Betrieb wirkt sich bei der BMW-

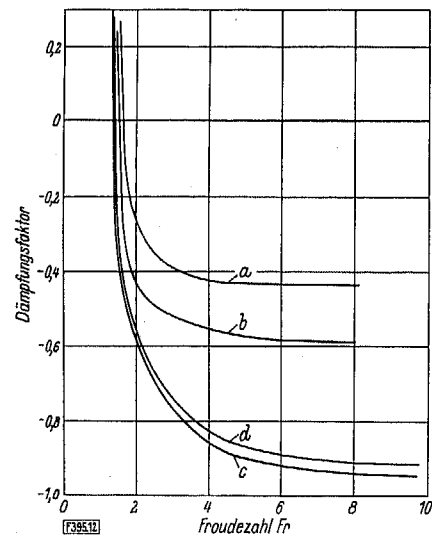


Bild 12. Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors (Realteil der Wurzeln  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ ) der Schwingung von der Froudezahl.

a Vespa-Roller, b Dürkopp-MD 150-Maschine, c BMW-R 51/3-Maschine im Solobetrieb, d BMW-R 51/3-Maschine im Beifahrer-Betrieb

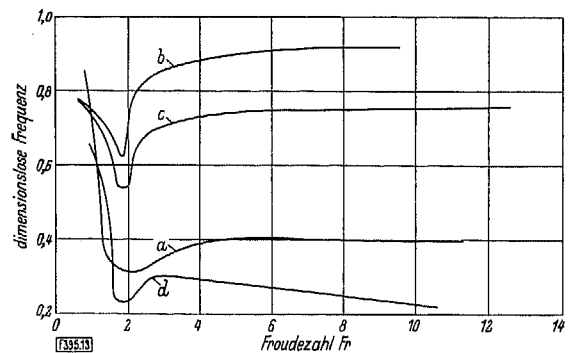
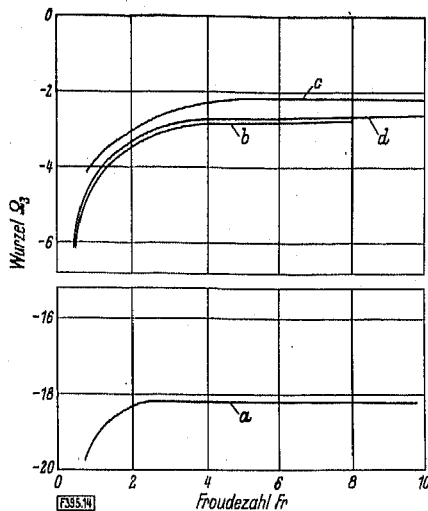


Bild 13. Abhängigkeit der dimensionslosen Frequenz (Imaginärteil der Wurzeln  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ ) der Schwingung von der Froudezahl.

Erklärungen wie in Bild 12

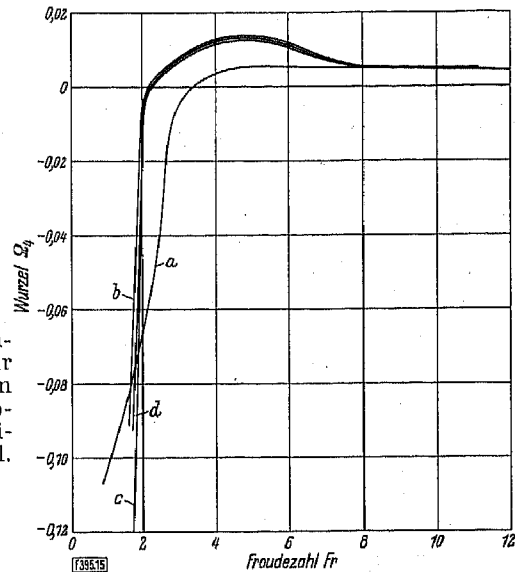


**Bild 14** (links). Abhängigkeit der Wurzel  $\Omega_3$  für das Zurückschnellen in die Nulllage von der Froudezahl.

Erklärungen wie in Bild 12

**Bild 15** (rechts). Abhängigkeit der Wurzel  $\Omega_4$  für das langsame Anwachsen des Ausschlags bei höheren Geschwindigkeiten von der Froudezahl.

Erklärungen wie in Bild 12



Maschine in einer Verkleinerung der Frequenz um mehr als die Hälfte des Solo-Betriebswertes aus. Bei schwächeren Maschinen ist eine noch größere Senkung der Frequenz durch den Beifahrer-Betrieb zu erwarten. Allerdings wird der Unterschied in der Praxis nicht so groß, weil der Beifahrer mangels geeigneter Festhaltungsmöglichkeiten nicht „starr mit der Maschine verbunden“ an allen Bewegungen teilnimmt, sondern nur mit einem Teil seiner Eigenmasse die Masse der Maschine wirksam vergrößert. Messungen zeigten, daß die Frequenz beim Beifahrer-Betrieb nur um etwa 10% absinkt.

Die Werte für die negative Wurzel  $\Omega_3$ , die das Zurückschnellen nach dem Störausschlag bestimmen, unterscheiden sich bei den Kraftfahrzeugen nur wenig (vgl. Bild 14). Der absolute Wert für den Vespa-Roller übertrifft jedoch die Werte für die Motorräder um das 7- bis 8fache (wohl wegen der kleinen Masse der gelenkten Teile).

Die Wurzel  $\Omega_4$  interessiert allenfalls im oberen Geschwindigkeitsbereich. Die Werte für die Motorräder nähern sich mit zunehmender Geschwindigkeit einander und sind ab  $Fr = 8$  (entsprechend  $v \approx 60$  km/h) etwa gleich groß. Die Kurve für die Wurzel  $\Omega_4$  des Rollers verläuft ab  $Fr \approx 2$  etwas unter den anderen Kurven, nähert sich jedoch ebenfalls mit wachsender Geschwindigkeit dem Wert für die Kraftfahrzeuge.

Die Wurzeln  $\Omega_3$  und  $\Omega_4$  haben für den Fahrbetrieb und damit für die Auslegung von Fahrwerken keine nennenswerte Bedeutung. Die kleine Instabilität durch  $\Omega_4$  wird vom Fahrer bei der langsamen Ausschlagvergrößerung mühelos und ohne zusätzliche Beanspruchung ausgeglichen. Das Zurückschnellen der gelenkten Teile entsprechend  $\Omega_3$  ist eine erwünschte Bewegung. Auf die Frequenz der Schwingung dagegen muß besonders geachtet werden; sie darf nicht in der Nähe der Eigenschwingungszahl irgendeines schwingungsfähigen Systems der Maschine und auch nicht im Bereich der Frequenz der häufig durch Straßenunebenheiten erzeugten Schwingungen liegen, da sonst auch bei starker Dämpfung angefachte Schwingungen entstehen können.

## 2.5 Die Wirkung des Steuerdämpfers

Die Flatterneigung wird im allgemeinen durch einen Reibungsdämpfer unterdrückt, der nach Be-

darf bei höherer Geschwindigkeit vom Fahrer angezogen werden kann und den bei einer Reibungsdämpfung üblichen Einfluß auf ein schwingendes System hat. Der Dämpfer verkleinert die Amplituden ohne Verändern der Schwingungsfrequenz linear. Allerdings bekommt die Dämpfungskonstante bei niedriger Geschwindigkeit ein positives Vorzeichen. In diesem Gebiet bewirkt der Dämpfer ein verstärktes Anfachen der Schwingungen. Bei höherer Geschwindigkeit wird jedoch die Konstante negativ, d. h. man erhält die vorstehend beschriebene Dämpfungswirkung.

Die bessere Fahrsicherheit beim Benutzen des Steuerdämpfers beruht jedoch weniger auf seiner Eigenschaft, einmal entfachte Schwingungen abklingen zu lassen, als vielmehr ihre Entstehung zu unterdrücken. Erfahrungsgemäß nimmt das Lenkungsflattern erst bei einer bestimmten Größe der Ausschläge so sehr zu, daß der Fahrer sie nicht mehr begrenzen kann. Die Lenkung schlägt dann mit großer Gewalt rechts und links gegen die Anschläge. Der Energieumsatz ist dabei so groß, daß auch ein fest angezogener Dämpfer die Schwingung nicht schnell genug zum Abklingen bringen könnte. Die Schwelle zu dieser durch hohe Energiezufuhr ausgelösten Verstärkung der Schwingungen scheint das (rechnerisch kaum zu erfassende) Überschreiten des durch die Haftreibung bestimmten Kraftschlusses zwischen dem Vorderrad und der Fahrbahn zu sein. Im allgemeinen vermag der Steuerdämpfer dagegen die durch den Fahrer oder die Fahrbahn angeregten Schwingungen bereits beim Entstehen zu unterdrücken und damit die Gefahr des Lenkungsflatterns weitgehend zu bannen.

Es bleibt jedoch festzustellen, daß ein solcher Steuerdämpfer ein Notbehelf ist, da er beim Wechseln der Geschwindigkeit, z. B. zum Durchfahren von Ortschaften, stets vom Fahrer bedient werden muß und auch seine Wirkung nicht immer auszureichen braucht, um Schwingungserscheinungen auszuschalten. Ein Fahrwerk sollte vielmehr so beschaffen sein, daß man es ohne Steuerdämpfer fahren kann. Es wäre u. U. an den Einbau eines Flüssigkeitsdämpfers zu denken, der den schnellen Flatterschwingungen hohen Widerstand entgegengesetzt, hingegen die langsamen Stabilisierungsbewegungen des Fahrers bei

kleiner Geschwindigkeit zuläßt. Durch eine solche hydraulische, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung könnte man auch ohne andere Maßnahmen die Eigenfrequenz des Systems ändern.

Die hier dargestellten theoretischen Ergebnisse wurden durch Messungen überprüft und bestätigt<sup>4)</sup>.

### 3. Zusammenfassung

Die bekannten linearisierten Bewegungsgleichungen für das Fahrrad wurden durch genauere Berücksichtigung des Vorderradsystems erweitert. Mit ihrer Hilfe kann man den Bewegungsablauf von Einspurfahrzeugen rechnerisch untersuchen. Dabei ergaben sich drei charakteristische Bewegungen, und zwar eine bei höheren Geschwindigkeiten gedämpfte, bei niedrigen jedoch angefachte Schwingung, ein sehr rasches Zurückschnellen des ausgelenkten Systems in die Mittellage und eine bei hoher Geschwindigkeit sehr langsame Vergrößerung bzw. bei niedriger Geschwindigkeit eine langsame Verkleinerung des Aus-

<sup>4)</sup> E. Döhning: Die Stabilität von Einspurfahrzeugen. Automob.-techn. Z. Bd. 56 (1954) S. 68/72.

schlages. Es lassen sich drei Geschwindigkeitsbereiche unterscheiden. Im untersten Bereich, der sich bei heute üblichen Fahrwerken ungefähr von 0 bis 20 km/h erstreckt, herrscht Instabilität wegen der Anfachung der Schwingung. Im mittleren Fahrbereich, von etwa 20 bis 40 km/h, ist das Einspurfahrzeug theoretisch eigenstabil. Im oberen Geschwindigkeitsbereich, bei mehr als ungefähr 40 km/h, tritt wieder eine kleine Instabilität in Form eines sehr langsamen Anwachsens eines einmal herbeigeführten Ausschlages ein (Ausschlagsverdoppelung in 5 bis 10 s). Der Schwingungsvorgang läuft für den Lenkeinschlag und für die Schräglage phasenverschoben ab.

Messungen bestätigten, daß die Berechnung des Bewegungsablaufes mit Hilfe der linearisierten Bewegungsgleichungen zum Ermitteln der Schwingungsfrequenz und des Dämpfungsfaktors ausreicht. Die Einflüsse der Grundgrößen auf diese beiden das Fahrverhalten entscheidend beeinflussenden Faktoren können damit theoretisch verfolgt werden. Dadurch wird die Möglichkeit geboten, Wege zum Verbessern der Fahrwerke von Einspurfahrzeugen zu finden.

Eingegangen am 20. 2. 1954

DF 395

## Bücherschau

DK 621—5 : 621.316.7 (042)

**Regelungstechnik.** Vorträge des VDI/VDE-Lehranges in Bonn 1953 und Essen 1954. Hrsg. vom Fachausschuß für Regelungstechnik des Vereines Deutscher Ingenieure und des Verbandes Deutscher Elektrotechniker. Düsseldorf, Wuppertal und Berlin 1954, Deutscher Ingenieur-Verlag GmbH. und VDE-Verlag GmbH. 291 S. m. 283 Bild. Preis geb. 24,— DM.

Selten hat wohl eine Tagung über ein Teilgebiet der Technik in allen Kreisen der Industrie solchen Wiederhall gefunden wie der Lehrgang über Regelungstechnik in Bonn im Jahre 1953 und seine Wiederholung in Essen im Jahre 1954. Die großen Erwartungen, die jeder Teilnehmer an der Tagung auf das Erscheinen der Vorträge in Buchform gesetzt hat, sind noch übertroffen worden. Ohne daß das Werk den Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, ist es eine Fundgrube für jeden, der in der Praxis oder im Studium mit regeltechnischen Fragen in Berührung kommt.

Das Buch wurde in sechs Hauptabschnitte gegliedert: Grundlagen, Technik der Regelgeräte, Regelstrecken und Regler, Anwendung der Regler in der Verfahrensindustrie, Antriebsregelung, Regelung in Kraftwerken und elektrischen Netzen.

Ein Anhang, der insbesondere beim Studium des amerikanischen Schrifttums auf diesem Gebiete gute Dienste leisten dürfte, enthält die regeltechnischen Grundbegriffe in verschiedenen Sprachen. Dank der genauen Befolgung des Normblattes DIN 19 226, das sozusagen gerade zur rechten Zeit fertig wurde, erwies sich die Befürchtung einer zu großen Uneinheitlichkeit der Darstellung als unbegründet. Im Gegenteil hat die Tatsache, daß 27 verschiedene Verfasser — jeder von ihnen ein anerkannter Fachmann auf seinem Gebiet — ihre persönliche Ansicht kundtaten, dazu beigetragen, dem Leser mehr als nur Buchwissen zu vermitteln.

Es ist zu hoffen, daß in einigen Jahren wieder eine ähnliche Tagung stattfinden kann, die die Lücken schließt, die notwendigerweise bei jedem nicht zu umfangreichen Lehrgang dieser Art bleiben mußten. Man kann nur wünschen, daß diesem Buch eine große Verbreitung beschieden sein wird. DF 522

E. Pestel VDI

DK 519.3 Carathéodory (022.5)

**Gesammelte Mathematische Schriften.** Von Constantin Carathéodory. Bd. 1: Variationsrechnung. Hrsg. im Auftrag u. m. Unterstützung d. Bayer. Akademie d. Wissenschaften. München 1954, C. H. Beck. 438 S. mit 49 Bild. Preis geb. 42,— DM.

Im Jahre 1944 wurde der Plan einer Herausgabe der gesammelten Abhandlungen von C. Carathéodory gefaßt; er nahm die Gestaltung dieses Planes zunächst selbst in die Hand, erlebte aber die Fertigstellung nicht mehr (er starb 1950). Das Werk soll drei bis vier Bände umfassen; der nun erschienene erste Band enthält die Einzelarbeiten über Variationsrechnung. Die früher selbständig erschienenen Bücher werden nicht in die Gesamtausgabe aufgenommen, somit findet man im ersten Band auch nicht das bekannte Werk „Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung“, wohl aber aus dem Buche „Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik“ von P. Frank und R. v. Mises den Abschnitt über Variationsrechnung, der für die Auffassung, die Carathéodory von der Variationsrechnung hatte, so charakteristisch ist. Der berühmten Dissertation über die diskontinuierlichen Lösungen und der Habilitationsschrift über starke Maxima und Minima folgen grundlegende Arbeiten zur allgemeinen Theorie (verschiedene notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Minimum, singuläre Punkte, Klasseneinteilungen, feldartige Extremalenscharen, Minima bei mehrfachen Integralen usw.). Der Verfasser hat stets den Anwendungen der Variationsrechnung in der Mechanik und der Optik sehr nahe gestanden. So ist es sehr zu begrüßen, daß nunmehr seine klassisch zu nennenden,