Der Kreisel

Seine Theorie und seine Anwendungen

Von

Dr. R. Grammel

o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

Zweite, neubearbeitete Auflage

Zweiter Band:

Die Anwendungen des Kreisels

Mit 133 Abbildungen

Springer-Verlag

Berlin · Göttingen · Heidelberg

1950

wachsender Wellenfrequenz α nimmt c_2 erfahrungsgemäß bald auf vernachlässigbare Beträge ab.

Wenn wir uns daher auf Wellenfrequenzen unter α' beschränken, so haben wir das Ergebnis: Die Kreiselwirkung der Maschine verkleinert die Amplitude der Stampfschwingungen χ des Schiffes, und zwar unabhängig vom Drehsinn der Maschine, ruft aber dafür eine Gierschwingung ψ hervor. Merklich kann diese Kreiselwirkung wohl nur bei Schiffen mit verhältnismäßig sehr starken Maschinen werden.

Man kann dieses Ergebnis auch so ausdrücken: Die Kreiselwirkung der Antriebsmaschine erhöht die Steifigkeit des Schiffes im Seegang. In der — allerdings bei weitem nicht zu erreichenden — Grenze $D_\varphi \longrightarrow \infty$ würde nach (34) bis (36) $a^2 = b^2 = 0$, das Schiff also vollständig unnachgiebig im Seegang. Man erkennt dieses Verhalten noch deutlicher, wenn man die Amplitudenquadrate a^2 und b^2 als Ordinaten über einer Abszisse D_φ^2 aufträgt. Man erhält dann Kurven vom Typ der Abb. 25.

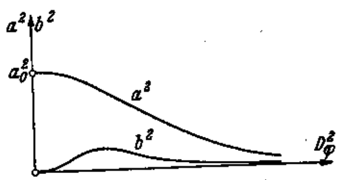

Abb. 25. Amplitudendiagramme.

Sodann betrachten wir noch einen Raddampfer, der parallel zu den Wellentälern einer quer zu ihm anlaufenden Dünung fährt. Hier muß man auf die Gleichungen (28) und (30) zurückgreifen, worin nun D_χ den Drehimpuls des Radsatzes samt den entsprechenden querschiffs umlaufenden Maschinenteilen bedeutet. Mit $W_\varphi = w_\varphi \dot{\varphi}$ und $F_1 \equiv c_1 \sin \alpha t$ entstehen so die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_1 \ddot{\varphi} + w_\varphi \dot{\varphi} + G h_1 \varphi - D_\chi \dot{\psi} &= c_1 \sin \alpha t, \\ C_1 \ddot{\psi} + w_\psi \dot{\psi} \qquad\qquad + D_\chi \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Vergleicht man dieses System mit (31), so kann man sofort alle früheren Ergebnisse (32) bis (38) übertragen, wenn man darin $\chi, B_1, w_\chi, h_2, c_2$ und D_φ ersetzt durch $\varphi, A_1, w_\varphi, h_1, c_1$ und $-D_\chi$. Und mithin verkleinert der Radsatz des Raddampfers die Amplitude der Rollschwingungen φ und ruft dafür auch hier eine Gierschwingung ψ hervor. Weil die Rollschwingungen stets unangenehmer sind als die Gierschwingungen, so ist diese Kreiselwirkung bei Raddampfern auf alle Fälle durchaus günstig, wenn sie wohl auch zahlenmäßig in der Regel wieder nicht sehr groß sein kann.

Ganz entsprechend ließe sich die Koppelung der Roll- und Stampfschwingungen φ und χ an Hand der Gleichungen (28) und (29) durch Rotoren mit lotrechter Achse untersuchen, etwa bei Schiffen, die mit Flettnerrotoren ausgestattet waren.

7. Das Zweirad. Während bei den bisher betrachteten, an sich stabilen Fahrzeugen die Kreiselwirkung sich als nützlich, gleichgültig oder schädlich erwiesen hat, aber jedenfalls an der Stabilität kaum etwas ändern konnte, so werden wir jetzt bei dem an sich durchaus labilen Zweirad finden, daß zu seiner Stabilisierung gerade die Kreiselwirkung der beiden Räder, neben einer anderen, durch die Schwerkraft selbst ausgelösten Wirkung, wesentlich beiträgt.

Was zunächst das Zweirad in seiner Gestalt als gewöhnliches Fahrrad anlangt, so ist seine Kinetik ein oft behandeltes[1] klassisches Problem der Mechanik. Die Lösung führt auf das ungereimte, jeder Erfahrung widersprechende Ergebnis, daß das Fahrrad üblicher Bauart oberhalb einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit, die sogar ziemlich niedrig liegt (rund 20 km/h), nicht mehr stabil fährt. Dieses sonderbare Ergebnis rührt zweifellos davon her, daß die Theorie einen starren und starr mit dem Fahrrad verbundenen, also vollkommen ruhig sitzenden Fahrer (oder ein unbemanntes Fahrrad) voraussetzen muß und sich nicht darum kümmern kann, daß tatsächlich der Fahrer dem Fahrrad fortwährend größere oder kleinere, oft unbewußte und kaum merkliche Hilfen erteilt, sei es, indem er die Lenkstange bedient, sei es auch nur dadurch, daß er sein Körpergewicht leicht verlagert, wie etwa bei freihändigem Fahren. Diese Hilfen, die zwar oft bloß klein, aber doch für die Stabilität entscheidend sind, könnte die Theorie, wenn überhaupt, nur mit einem ungeheuren Rechenaufwand berücksichtigen, der schwerlich lohnen würde, umso weniger, als man auch dabei wieder Annahmen zu Grunde legen müßte, die das willkürliche oder unbewußte Verhalten des Fahrers doch wohl kaum richtig zu erfassen vermöchten.

Wir ziehen daher einen anderen Weg vor, dessen Ziel zwar etwas bescheidener ist, der aber dafür anschaulich zu den praktisch wichtigsten Erkenntnissen führt.

Das Fahrrad in der heute gebräuchlichen Gestalt besteht aus zwei drehbar verbundenen Teilen, dem Radrahmen mit Hinterrad und Tretkurbel, und der Lenkstange mit dem Vorderrad (Abb. 26). Für die moderne Bauart ist wesentlich der Umstand, daß die Lenkstangenachse, geometrisch verlängert, unter dem Mittelpunkt O_2 des Vorderrades vorbeigeht und vor dessen tiefstem Punkt A_2 den Boden in B trifft, und zwar so, daß der Radstand $a_1 = A_1 A_2$ das etwa 9- bis 13-fache der Strecke $a_2 = A_2 B$ ist. Auf dieser Anordnung der Punkte

[1] Vgl. insbesondere *F. J. W. Whipple*, Quart. Journ. Math. 30 (1898), S. 312, und *E. Carvallo*, Journ. Ecole Polyt. (2) 5 (1900), S. 119, und 6 (1901), S. 1.

A_1, A_2, B und O_2 beruht, wie wir sehen werden, im wesentlichen die Stabilisierbarkeit des Fahrrades. Jene Anordnung hat nämlich zweierlei Folgen.

Erstens beginnt bei einem während der Fahrt etwa einsetzenden seitlichen Neigen (Umfallen) des Zweirades die in O_2 angreifende Schwere des Vorderrades alsbald, dieses Rad in solchem Sinne um die Lenkstange zu drehen, daß das Fahrrad eine Kurve nach der richtigen Seite beschreibt. Ist nämlich C der Schnittpunkt des ursprünglich lotrechten Hinterradhalbmessers und der Lenkstangenachse, so kann sich bei aufrechtem Fahrrad — besehen von einem nebenher fahrenden Beobachter, für den also die Punkte A_1 und A_2 bei hinreichend rauh vorausgesetzter waagerechter Fahrbahn in Ruhe sind — der Radrahmen samt Hinterrad außer um die Achse $A_1 A_2$ nur um die Achse A_1 C drehen, die Lenkstange samt Vorderrad aber offenbar nur um die Achse $A_2 C$. Ist also das ganze Fahrrad um einen kleinen Winkel φ seitlich geneigt (vgl. Abb. 26), so tritt der Vektor des Gewichts des Vorderrades aus der Ebene $C A_1 A_2$ heraus (in Abb. 26 auf den Beschauer zu) und hat somit senkrecht zur Achse $A_2 C$ eine Komponente, welche windschief an der Achse $A_2 C$ vorbei geht (in Abb. 26 wieder vor $A_2 C$) und ein Drehmoment um $A_2 C$ besitzt, so daß das System Vorderrad-Lenkstange um die Achse $A_2 C$ gerade im richtigen Sinne gedreht und mithin das ganze Fahrrad in eine Kurve nach der Seite der Neigung geführt wird. Dadurch wird eine Fliehkraft geweckt, die das weitere Umfallen aufzuhalten strebt; oder anders ausgedrückt: es kommt so ganz von selbst eine Fahrform zustande, die der vorhandenen seitlichen Neigung in natürlicher Radstellung angemessen ist und sich ihr — bei entsprechender Nachhilfe durch den Fahrer selbst — völlig

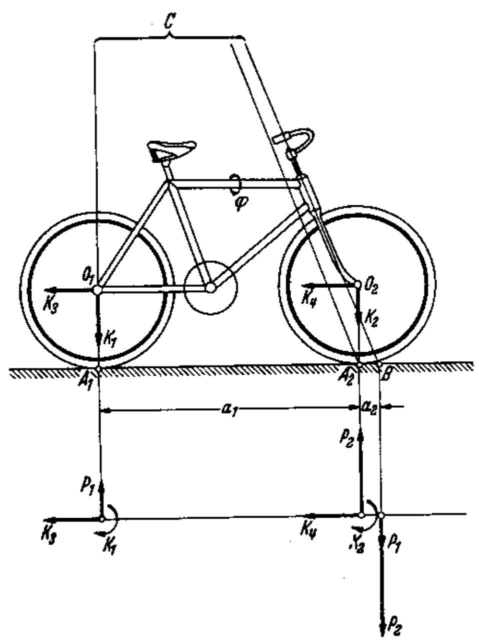

Abb. 26. Fahrrad.

anpassen kann. Der Fahrer empfindet dieses Verhalten des Fahrrades (bewußt oder unbewußt) als angenehm, und auf ihm, in Verbindung mit einer zweiten, jetzt noch zu besprechenden Kreiselwirkung, beruht die Tatsache, daß das Radfahren leicht erlernbar und das Stabilisieren der Fahrt mühelos ist.

Zweitens werden nämlich durch eine beginnende seitliche Neigung nun auch noch sehr günstige Kreiselmomente hervorgerufen, welche das Entstehen jener Kurvenfahrt erheblich unterstützen. Nehmen wir an, das ganze Fahrrad fange an, sich mit einer Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ nach rechts (in der Fahrtrichtung gesehen) zu neigen, so werden im Hinterrad und im Vorrderad zwei (bei gleichen Rädern gleiche) Kreiselmomente

$$K_1 = K_2 = D\dot{\varphi} \tag{40}$$

geweckt, deren Vektoren lotrecht abwärts weisen (Abb. 26). Hier bedeutet D den Drehimpuls jedes Rades bei der Fahrt, also mit der axialen Drehmasse A eines Rades, der Fahrgeschwindigkeit v und dem Radhalbmesser r

$$D = A\,\frac{v}{r} \tag{41}$$

oder, da man das Rad nahezu wie einen Ring von der Masse $m=G/g$ und dem Halbmesser r ansehen darf, für Abschätzungen genau genug

$$D \approx \frac{G}{g}\,rv\,. \tag{42}$$

Man wird vermuten, daß die beiden Drehkräfte K_1 und K_2 den Radrahmen und das Vorderrad ebenfalls so zu drehen suchen, daß das Fahrrad in die richtige Kurve einbiegt.

Diese Vermutung, deren Richtigkeit sich keineswegs von selbst versteht, sondern wieder eine Folge der Anordnung der vier Punkte A_1, A_2, B und O_2 ist, kann folgendermaßen bestätigt werden. Das Kreiselmoment K_1 des Hinterrades kann als Kräftepaar (P_1, P_1) dargestellt werden, dessen eine Kraft vom untersten Punkt A_1 des Hinterrades auf die (hinreichend rauh zu denkende) Fahrbahn ausgeübt wird, wogegen die andere an der Lenkstange angreift, und zwar in deren tiefstem Punkte B (Abb. 26); wenigstens äußert sich die Wirkung des Hinterrades über den Rahmen auf das Vorderrad so wie eine solche Kraft in jenem mit der Lenkstange starr verbunden zu denkenden Punkte B. Diese Kraft sucht nun in der Tat gerade wieder das Vorderrad um die Achse $A_2 C$ zu drehen, und zwar, da B vor A_2 liegt, im richtigen, das Umfallen auffangenden Sinne.

Aber auch das Kreiselmoment K_2 des Vorderrades kann durch ein Kräftepaar (P_2, P_2) ersetzt werden, dessen eine Kraft in B, und dessen andere in A_2 angreift und von der Fahrbahn aufgenommen wird. Das Kreiselmoment K_2 des Vorderrades hat demnach die gleiche nützliche Wirkung wie das Kreiselmoment K_1 des Hinterrades.

Man darf als Maß für die Wirkung der beiden Kreiselmomente K_1 und K_2 die beiden in B angreifend gedachten Kräfte P_1 und P_2 ansehen, die das Vorderrad in die Kurve eindrehen, und zwar wird wegen

$$K_1 = (a_1+a_2)\,P_1, \qquad K_2 = a_2 P_2$$

mit $K_1 = K_2$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{a_1}{a_2} + 1. \tag{43}$$

Die rechte Seite hat bei den heutigen Fahrrädern den Wert 10 bis 14, und ebenso vielfach ist mithin die Kreiselwirkung des Vorderrades stärker als die des Hinterrades.

Jedenfalls unterstützt also die Kreiselwirkung in erwünschter Weise die Wirkung des in O_2 angreifenden Gewichts des Vorderrades bei der Stabilisierung des Fahrrades. Aber sie unterstützt sie nicht nur, sondern übertrifft sie sogar bei weitem. Denn während die Gewichtswirkung wegen der Reizschwelle der unvermeidlichen Reibung im Lenkstangenlager erst bei einer bestimmten seitlichen Neigung φ des Fahrrades anspricht, so wird die Kreiselwirkung nach (40) schon bei der geringsten seitlichen Drehbewegung $\dot{\varphi}$ geweckt. Die Drehimpulse der beiden Räder nehmen sozusagen das beginnende Umfallen des Fahrrades früher wahr als die Schwerkraft und können daher mit ihren Kreiselmomenten rascher eingreifen, als die Schwere des Vorderrades allein. Schon die Theorie des unbemannten oder mit einem starren Fahrer besetzten Fahrrades zeigt[1], daß diese Kreiselwirkung maßgebend an der Stabilisierung beteiligt ist, und bestätigt so unsere nicht formelmäßigen, sondern nur begrifflichen Überlegungen.

Sobald nun das Fahrrad in die Kurve geht, sei es infolge einer Seitenneigung, sei es nach dem Willen des Fahrers, werden zwei weitere Kreiselmomente K_3 und K_4 im Hinterrad und im Vorderrad erzeugt, deren Vektoren bei Rechtskurven waagerecht nach hinten, bei Linkskurven waagerecht nach vorne gerichtet sind, und welche die Beträge

$$K_3 = D\,\omega\cos\varphi_1, \qquad K_4 = D\,\omega\cos\varphi_2 \tag{44}$$

[1] Siehe *F. Klein* und *A. Sommerfeld*, Über die Theorie des Kreisels, S. 880.

haben, wenn ω die Wendegeschwindigkeit des Fahrrades in der Kurve ($\omega = v/R$ mit dem Kurvenhalbmesser R) ist und φ_1 sowie φ_2 die nur wenig von einander und von Null verschiedenen Neigungen der beiden Radachsen gegen die Waagerechte bedeuten. Diese Kreiselmomente suchen das geneigte Fahrrad aufzurichten, unterstützen also das Moment der Fliehkraft, bleiben jedoch gegenüber diesem, wie eine zahlenmäßige Abschätzung zeigt, immer geringfügig.

Wir stellen zusammenfassend fest, daß zwar die eigentliche stabilisierende Kraft beim Fahrrad die Fliehkraft ist, daß diese aber im wesentlichen durch die Kreiselmomente K_1 und K_2, die bei einer beginnenden Umfallbewegung entstehen, ausgelöst wird, und zwar hauptsächlich durch das Kreiselmoment K_2 des Vorderrades, indem dieses Kreiselmoment die Lenkstange in zweckmäßiger Weise führt.

Wenn der Fahrer selbst stabilisiert, indem er seinen Schwerpunkt verlagert oder die Lenkstange betätigt, so unterstützen ihn dabei die Kreiselmomente; ja sie werden ihm in unwachsamen Augenblicken sogar zuvorkommen.

Die Kreiselwirkung ist somit beim Fahrrad in jeder Hinsicht günstig, wobei es glücklicherweise weniger auf ihre Größe als auf ihr Vorhandensein überhaupt ankommt, so daß der Erbauer, der doch an Gewicht zu sparen wünscht, auch den Rädern kleine träge Massen und also kleinstmögliche Drehmassen geben darf.

Bei Motorrädern schließlich treten die gleichen Kreiselerscheinungen auf wie bei gewöhnlichen Fahrrädern; man hat lediglich den Drehimpuls der umlaufenden Teile des Motors, falls seine Achse quer liegt, dem Drehimpuls des von ihm angetriebenen Rades positiv oder negativ hinzuzufügen, je nachdem der Motor im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne dieses Rades läuft. In der Regel ist trotz des großen Übersetzungsverhältnisses dieser zusätzliche Drehimpuls kleiner als der des Rades. Wenn der Motor allerdings mit der Achse des Vorderrades unmittelbar verbunden ist, wie bei einigen Bauarten, so kann dadurch das Kreiselmoment K_2 des Vorderrades so stark vergrößert werden, daß es die Stabilisierung gewissermaßen übersteuert, d. h. bei beginnender Seitenneigung des Motorrades die Lenkstange zu hastig dreht und so zu Unzuträglichkeiten führt. Auch die Lenkung durch den Fahrer mag dadurch beeinträchtigt werden, insofern beim Einbiegen in eine Kurve das Kreiselmoment K_4 ungehörig groß wird. Daß sich derartige Bauarten nicht wohl bewährt haben, dürfte wahrscheinlich auf diese zu großen Kreiselwirkungen zurückzuführen sein.