

Datum: 7 sepr, 2006

Uitsluitend voor persoonlijk gebruik / for personal use only



**Technische Universiteit Delft**

Bibliotheek  
Prometheusplein 1  
Postbus 98  
2600 MG Delft  
Tel: +31 (0) 15 27 85678  
Fax: +31 (0) 15 27 85706  
Email: library@tudelft.nl  
www.library.tudelft.nl

**Aan:** TU DELFT FACULTEIT 3ME; J.D.G. KOOIJMAN  
ENGINEERING MECHANICS, AFDELING PMA

MEKELWEG 2  
2628 CD DELFT

NEDERLAND

**Aanvraag nr: 1241456**

Uw referentie(s): HER49

**Artikelomschrijving:**

Aantal kopieën: 31

**Artikel:** DE STABILITEIT VAN HET RIJWIEL

**Auteur:**

**Titel:** RAPPORT VAN HET INSTITUUT VOOR RIJWIELONTWIKKELING

**Jaar:** 1000 **Vol.** **Nr.** 3 **Pag.** GEEN IDEE

**Plaatsnummer:** DOI 0340

8/4'49<sup>e</sup>

JRO Rapport nr 3

DE STABILITEIT VAN HET RIJWIEL.

I N H O U D.

<u>Hoofdstuk</u>	<u>Pag.</u>
1. Inleiding	1
2. De aard van de bewegingen van een rijdend rijwiel.	2
3. Kinematische betrekkingen en verklaring van de gebruikte notaties.	5
4. De bewegingsvergelijkingen.	8
5. Afleiding der stabiliteitsvoorwaarden.	15
6. Conclusies, die uit de stabiliteitsvoorwaarden getrokken kunnen worden.	16
7. Verdere uitbreiding van het stabiliteitsonderzoek,	21

\*       \*

\*

## DE STABILITEIT VAN HET RIJWIEL.

### 1. Inleiding.

Iedereen, die wel eens uiteenlopende typen van rijwielen heeft bereden, heeft ondervonden, dat, in het bijzonder bij lage snelheden, de constructie van de fiets een belangrijke invloed heeft op het gemak waarmee men zich in evenwicht kan houden.

Het is dan ook begrijpelijk, dat reeds korte tijd, nadat het rijwiel zijn intrede had gedaan, pogingen zijn ondernomen om na te gaan welke invloed de stuurashelling, de naloop, de zwaartepuntsligging, het gewicht van het voorwiel en andere grootheden van de fiets op de stabiliteit van het rijden uitoefenen om zodoende tot de meest gunstige constructie te komen.

De wiskundige moeilijkheden en vooral de bewerkelijkheid van de uit te voeren berekeningen, waar men bij deze pogingen op stuitte, waren echter zo groot, dat het bij pogingen is gebleven. Wel hebben Carvallo\*) en Whipple\*\*) omstreeks 1900 voor een gegeven rijwiel het snelheidsgebied, waar binnen het stabiel is, bepaald en enige algemene aanwijzingen gegeven. Deze artikelen zijn echter in specifiek wiskundige tijdschriften gepubliceerd en de gegeven aanwijzingen waren van te beperkte waarde om enige invloed op de ontwikkeling van de rijwielconstructie te kunnen uitoefenen. Zo heeft zich de fiets geheel volgens inzichten van de practijk ontwikkeld en men is gekomen tot een algemeen aanvaard model, waarvan men aanneemt, dat het het juiste compromis voorstelt tussen de eisen, die niet alleen de stabiliteit, maar ook de sterkte, de menselijke houding, de eenvoud van constructie en de fabricagekosten stellen.

Het blijft echter een onbevredigende toestand, dat een rijwielconstructeur niet bij machte is, de consequenties te overzien van het aanbrengen van enigszins ingrijpende veranderingen in een nieuw model en dat hij niet weet, welke maatregelen hij moet nemen om bijvoorbeeld een fiets te construeren, die ook bij lage snelheid nog goed berijdbaar moet zijn. Ook een objectieve vergelijking van de eigenschappen van het in Nederland gebruikelijke rijwieltypen met die van het Franse model, is voorshands nog niet mogelijk.

Om deze redenen werd besloten om in een serie monografieën de fundamentele problemen van het rijwiel zo grondig mogelijk onder de loupe te nemen. In dit rapport zal

\*) Journal de l'école polytechnique. 2de serie, Vol. 5 et 6, 1900 en 1901.

\*\*) Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 30, 1899.

alleen de stabiliteit behandeld worden, maar het ligt in de bedoeling om het te zijner tijd te laten volgen door studies betreffende uitwendige belastingen, sterkte, stijfheid en physiologie.

## 2. De aard van de bewegingen van een rijdend rijwiel.

In deze paragraaf zullen ter gedachtebepaling en vooruitlopend op de, in de volgende paragrafen, gemaakte berekeningen enige facetten van de beweging van een rijdende fiets worden besproken. Deze beschouwingen zullen echter geen aanspraak maken op exactheid, noch op volledigheid.

Wanneer men een fiets, voorzien van een berijder die zich niet beweegt en volkomen star met het frame is verbonden, maar die het stuur geheel vrij laat, een bepaalde snelheid zou geven, dan is het theoretisch mogelijk, dat hij zich rechtlijnig zou blijven voortbewegen, mits hij in nauwkeurig verticale stand zou worden losgelaten en er zich geen storende invloeden voordoen zoals oneffenheden in de weg, zijdelingse windstoten en wat dies meer zij. In de praktijk is dit natuurlijk onmogelijk, omdat genoemde storingen, hoe gering ook, altijd aanwezig zullen zijn. Het gaat er nu maar om hoe deze fiets zal reageren op een kleine afwijking van de rechtvooruitgaande beweging; m.a.w. of een toevallige aanwezige stuuruitslaghoek  $\beta$  of hoek  $\epsilon$  tussen frame en verticaal automatisch groter of kleiner zal worden.

Van het een en ander kan men zich trachten reken-schap te geven door de volgende beschouwingen:

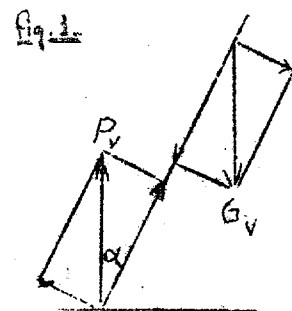
Indien de fiets naar rechts helt, zal het stuur naar rechts moeten uitslaan, opdat zodoende opgewekte middelpuntvliedende kracht naar links de fiets weer in zijn verticale stand kan terugbrengen, anders zal de helling naar rechts steeds groter worden en de fiets zal omvallen.

Voor de stabiliteit zijn dus van belang die effecten, die het stuur trachten te doen uitslaan naar de zijde waarheen het rijwiel helt.

Deze effecten zijn:

### 1. de naloop.

Fig. 1 stelt het achteraan-zicht van de fiets voor. Is er geen stuuruitslag, dus beschrijft de fiets een rechtlijnige beweging, dan zal de grondreactie verticaal omhoog gericht zijn. Wij merken op, dat de kracht  $P_v$  op het voorwiel een component heeft, loodrecht op het voorwielvlak gericht, tegengesteld aan de richting van omvallen. Lig dit



steunpunt van het voorwiel nu achter de stuuras, dan zal deze component een moment om de stuuras in de gewenste/uitoefenen en het stuur zal uitslaan naar de valzijde. /richting

2. de zwaartepuntsligging van het voorwielstuurgedeelte.  
In fig. 1 ziet men dat het gewicht van het stuurvoorwielgedeelte een component loodrecht op het voorwielvlak heeft, werkend in de richting van het omvallen. Indien het zwaartepunt hiervan vóór de stuuras ligt, zal het stuur ook in deze richting uitslaan.

3. de gyroscopische werking van het voorwiel.  
Indien men een fiets, met het voorwiel draaiend in de normale zin, een draaiing geeft om zijn langsas, dan zal het stuur uitslaan in de gewenste richting. Men kan dit duidelijk waarnemen aan een fiets, die men heeft opgehangen aan het achterwiel. Een zwaar en groot voorwiel is dus gunstig voor de stabiliteit.

4. het traagheidsmoment van het stuurvoorwielgedeelte om de stuuras.

Hoe kleiner dit traagheidsmoment is, des te sneller zal het stuur door de onder 1, 2 en 3 genoemde momenten draaien.

Deze maatregel is echter moeilijk te combineren met de vorige. Hoe groter immers de naloop, de voorlijke zwaartepuntsligging van het voorwielstuurgedeelte en het wiel, hoe groter is het traagheidsmoment daarvan om de stuuras.

Wij hebben door deze vier punten een indruk gekregen van de invloeden, die bij de stabiliteit van belang zijn. Maar kwantitatieve gegevens zijn met deze eenvoudige beschouwingen niet te verkrijgen. Evenmin is op deze manier het onderling verband van de genoemde effecten of de invloed van de stuurashelling te vinden.

In de volgende paragraaf is afgeleid, dat de algemene beweging van een fiets wordt weergegeven door vergelijkingen als:

$$\xi = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + e^{a_3 t} (C_3 \sin bt + C_4 \cos bt) \dots (1)$$

Hierin is:  $\xi$  = de hoek tussen frame-vlak en verticaal;  
 $e$  = 2,7183, het grondtal van de natuurlijke logaritmie.

$t$  = de tijd in seconden

$C_1, C_2, C_3, C_4$  zijn constanten, die de bewegingstoestand ten tijde  $t = 0$  bepalen.\*).

\*) Als de fiets ten tijde  $t = 0$  precies verticaal staat, met het stuur in de middenstand, dan is  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$  en blijft  $\xi = 0$  en  $\beta = 0$ .

$a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , en  $b$  zijn grootheden, die afhangen van de afmetingen en gewichten van de fiets met berijder en van de snelheid.

Voor de stuuruitslag  $\beta$  geldt dezelfde vergelijking, maar met andere waarden voor  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  en  $C_4$ .

De grootheden  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  en  $b$  hebben dezelfde waarde voor  $\beta$  en  $\xi$ , waaruit duidelijk blijkt hoe de omvalbeweging en de sturbeweging gekoppeld zijn.

Bij nadere beschouwing blijkt, dat van doorslaggevende betekenis voor de stabiliteit is: het al of niet negatief zijn van  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$ . Is een van deze grootheden positief, dan is er altijd een term, die met de tijd steeds groter wordt. Dit is dan ook het geval met  $\xi$  en de fiets zal dus vallen. Zijn  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$  daarentegen negatief, dan zullen alle termen steeds kleiner worden met de tijd, zodat een éénmaal aanwezige afwijking van de verticale stand automatisch weer verdwijnt.

Verder wordt nog opgemerkt, dat, tenzij  $b = 0$ , er een slingering zal optreden, waarvan de uitslagen steeds groter of kleiner zullen worden naar gelang  $a_3$  positief of negatief is.

In fig. 2 is getekend hoe voor één bepaalde Nederlandse fiets  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  en  $b$  afhangen van de snelheid. Men ziet hieruit, dat tussen 16 en 21,6 km/u alle  $a$ 's negatief en de beweging van deze fiets dus stabiel is. Boven 21,6 km/u is  $a_2$  positief, maar zeer klein. In dit snelheidsgebied is de beweging onstabiel, maar deze onstabieliteit is zo gering, dat de berijder het omvallen met kleine langzame verplaatsingen van zijn zwaartepunt of van het stuur zal kunnen voorkomen.

Laten wij als voorbeeld eens aannemen, dat de snelheid 36 km/u bedraagt (dan is  $a_3$  het grootst) en door een of andere oorzaak de omvalhoek zo groot is geworden, dat het zwaartepunt van de fiets 1 cm van de evenwichtsstand is verschoven, dan is deze afwijking na 50 m rijden nog maar 2 cm groter geworden, indien de berijder zich volkomen passief zou gedragen.

Daalt daarentegen de snelheid beneden de 16 km/u, dan zien wij, dat  $a_3$  sterk positief gaat worden. Het zal in dit geval dus van de acrobatische aanleg en scholing van de berijder afhangen hoe langzaam men nog kan fietsen. De onstabieliteit treedt in dit geval op in de vorm van een steeds groter wordende slingering. Beneden 3 km/u is  $b = 0$ , dan zal de fiets dus omvallen zonder eerst een slingerende beweging uit te voeren.

Fig. 2 geldt, zoals reeds gezegd is, voor een bepaalde fiets. Berekent men een dergelijk diagram voor een fiets, die anders geconstrueerd is, dan vindt men in het algemeen andere waarden voor de beide stabiliteitsgrenzen A en B.

In de volgende paragrafen zal nu worden onderzocht hoe deze grenzen afhangen van de afmetingen en de gewichtsverdeling van de fiets en zijn berijder.

De niet in de theoretische mechanica geschoolde lezer kan de paragrafen 3, 4 en 5 overslaan en onmiddellijk vervolgen met par. 6. Voor hem zij hier vermeld, dat

$$a_1, a_2, a_3 + b i \text{ en } a_3 - b i \text{ *)}$$

de wortels zijn van een vierde machtsvergelijking:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

In par. 6 wordt de betekenis van  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  en  $\alpha_4$  gegeven.

De voorwaarden voor het negatief zijn van  $a_1, a_2$  en  $a_3$  zijn nu:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4, \alpha_3 > 0 \text{ en } \alpha_4 > 0.$$

Dit zijn dus de stabiliteitsvoorwaarden.

### 3. Kinematische betrekkingen en verklaring van de gebruikte notaties.

In fig. 3 is een fiets in zijn meest algemene stand getekend. Het rijwiel zelf is gekarakteriseerd door de beide wielstralen  $r_a$  en  $r_v$ , de lengte van de loodlijnen vanuit de middelpunten der wielen  $B_a$  en  $B_v$ , op de stuuras neergelaten  $e$  en  $d$ , en de afstand van de voetpunten dezer loodlijnen  $m$ .

De stand van het rijwiel in de ruimte is bepaald door coördinaten  $x$  en  $y$  van het steunpunt van het achterwiel ten opzichte van een in de grond verankerd assenhuis  $O X Y Z$ , waarvan het  $X Y$  vlak met het grondvlak samenvalt; verder door de hoek  $\theta$  tussen de snijlijn van het achterwielvlak met het grondvlak en de  $X$ -as, door de hoek  $\xi$  tussen achterwielvlak en de verticaal en de hoek  $\psi$ , die de verdraaiing van het stuur om zijn as aangeeft.

In fig. 3 vindt men buiten de hierbovengenoemde nog de volgende hoeken en afstanden:

$p$  = de afstand tussen het steunpunt van het voorwiel  $S_v$  tot het snijpunt  $H$  van de stuuras met het grondvlak.

$q$  = de afstand tussen het steunpunt van het achterwiel  $S_a$  met het snijpunt van de stuuras met het grondvlak.

\*)  $i = \sqrt{-1}$  of juist  $i^2 = -1$



$\alpha$  = de hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het achterwielvlak (= framevlak) met het grondvlak.

$\gamma$  = de hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het voorwielvlak met het grondvlak.

$\beta$  = de hoek tussen de snijlijnen van het voor- en achterwielvlak met het grondvlak.

$\delta$  = de hoek tussen het voorwielvlak en de verticaal.

Tussen deze grootheden bestaan betrekkingen, waarvan men er enkele kan afleiden met behulp van de bekende formules van de drievlakshoek (zie fig. 4).

$$\operatorname{tg} \delta = \cot \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} + \cos \beta \operatorname{tg} \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \delta} = \frac{\sin \gamma}{\cos \varepsilon} \quad (4)$$

Om de dynamische eigenschappen van de fiets vast te leggen, worden de volgende assenkruisen aangenomen, die met het rijwiel meebewegen:

1. een assenkruis  $C_a$  X Y Z, verankerd in het frame, met de oorsprong in  $C_a$ , het gemeenschappelijke zwaartepunt van berijder, frame en achterwiel.
2. een assenkruis  $C_v$  X Y Z, verankerd in het met het stuur meedraaiende gedeelte met de oorsprong in  $C_v$ , het gemeenschappelijke zwaartepunt van voorwiel, stuur en voorvork, d.w.z. alle onderdelen, die bij draaiing van het stuur meebewegen.

De oriëntering van deze beide assenkruisen is zodanig, dat, indien de fiets verticaal staat met het stuur in de middenstand, de Z-as verticaal omhoog wijst, de X-as recht naar voren en de Y-as naar links.

Ten opzichte van deze assenkruisen worden de volgende traagheidsmomenten en -producten gedefinieerd:

$$\left. \begin{array}{l} I_{xa} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{za} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{xza} = \text{traagheidsproduct} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{van de berijder, het} \\ \text{frame- en achterwiel-} \\ \text{gedeelte, ten opzichte} \\ \text{van assenkruis } C_a \text{ X Y Z} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{xv} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{zv} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{xzv} = \text{traagheidsproduct} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{van het voorwiel-,} \\ \text{stuur- en voorvorkge-} \\ \text{deelte ten opzichte van} \\ \text{assenkruis } C_v \text{ X Y Z} \end{array}$$

Omdat de assenkruisen met de desbetreffende gedeelten van de fiets meebewegen, zijn de grootheden  $I_{xa}$ ,  $I_{xv}$ , enz. tijdens de beweging constant.

De plaats van de beide zwaartepunten  $C_a$  en  $C_v$  wordt gegeven door hun afstand tot het grondvlak  $h_a$  en  $h_v$  en door de afstanden  $u$  en  $a$  respectievelijk tot de verticalen door de steunpunten van achter- en voorwiel, met dien verstande, dat  $h_a$ ,  $h_v$ ,  $u$  en  $a$  gemeten worden aan de fiets in verticale stand met stuuruitslag = 0, zodat  $h_a$ ,  $h_v$ ,  $u$  en  $a$  constanten zijn, evenals  $f$  (= de horizontale afstand van  $C_v$  tot de stuuras.)

Wél variabel zijn gedurende de beweging alle hoeken ( $\theta, \beta, \psi, \alpha, \gamma, \xi$  en  $\delta$ ), de afstanden  $p$  en  $q$  en de wielbasis  $b$ , evenals de coördinaten  $x$  en  $y$  van het steunpunt van het achterwiel.

In het vervolg zullen echter slechts kleine afwijkingen van de rechtvoortgaande beweging van de fiets worden beschouwd. Dit betekent, dat aangenomen wordt, dat  $\psi, \theta, \beta, \xi$  en  $\delta$  oneindig klein van de 1e orde blijven! Het zal blijken, dat in dit geval de variaties van  $\alpha, \gamma, p, q$  en  $b$  oneindig klein van de 2e. orde zijn. Noemt men n.l.  $\alpha_0$  de waarde, die  $\alpha$  en  $\gamma$  hebben als  $\beta = \psi = 0$  en stelt men

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha \\ \text{en } \gamma &= \alpha_0 + \Delta\gamma \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dan leidt men af uit verg. (4), indien men oneindig kleinen van de 3e. orde verwaarloost:

$$\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \cos \xi = \sin(\alpha_0 + \Delta\gamma) \cos \delta$$

$$(\sin \alpha_0 \cos \Delta\alpha + \cos \alpha_0 \sin \Delta\alpha) \cos \xi = (\sin \alpha_0 \cos \Delta\gamma + \cos \alpha_0 \sin \Delta\gamma) \cos \delta$$

$$\left\{ \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2} + \dots\right) + \cos \alpha_0 (\Delta\alpha - \dots) \right\} \left(1 - \frac{\xi^2}{2} + \dots\right) =$$

$$\left\{ \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\Delta\gamma^2}{2} + \dots\right) + \cos \alpha_0 (\Delta\gamma - \dots) \right\} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \dots\right)$$

$$\Delta\alpha - \Delta\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 (\xi^2 - \delta^2) \dots \dots \dots (6)$$

Noemt men  $H_0$  dat punt van de stuuras, dat in het grondvlak ligt, wanneer de stuuruitslag, dus ook  $\beta = 0$ , dan zal in het algemeen, indien  $\beta$  en  $\xi \neq 0$  zijn,  $H_0$  een zekere afstand onder (of boven) het grondvlak komen te liggen. Deze afstand kan men uitdrukken achtereenvolgens in  $\Delta\gamma$  en  $p$  en in  $\Delta\alpha$  en  $q$  en deze uitdrukkingen aan elkaar gelijk stellen. Zo vindt men, als  $\Delta\alpha$  en  $\Delta\gamma$  oneindig klein zijn:

$$p \Delta \gamma = q \Delta \alpha \dots \dots \dots (7)$$

Uit verg. (6) en (7) lost men op:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= -\frac{p}{q-p} \times \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2) \\ \Delta \gamma &= -\frac{q}{q-p} \times \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Verg. (3) vereenvoudigt zich, indien men oneindig kleinen van de 3e. orde verwaarloost tot

$$\delta = \beta \cot \alpha + \varepsilon \dots \dots \dots (9)$$

Vult men vergelijking (9) in in vergelijking (8) en stelt men  $q - p = b$ , dan wordt:

$$\Delta \alpha = \frac{p}{b} (\varepsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) \dots \dots \dots (10)$$

$$\Delta \gamma = \frac{b+p}{b} (\varepsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) \dots \dots \dots (11)$$

In de vergelijkingen (9), (10) en (11) zijn met  $\alpha$ ,  $b$  en  $p$  die waarden bedoeld, die deze grootheden hebben, indien  $\beta = 0$ . Dit is ook in alle volgende vergelijkingen het geval. De hierdoor ingevoerde fout is oneindig klein van de 2e. orde ten opzichte van de andere termen van deze vergelijkingen. In het vervolg worden als onafhankelijk variabelen, die de beweging karakteriseren, gekozen  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  en  $\beta$ , en als constanten van de fiets:  $r_a$ ,  $r_v$ ,  $p$ ,  $b$ ,  $\cot \alpha$ ,  $I_{xa}$ ,  $I_{za}$ ,  $I_{xza}$ ,  $I_{xv}$ ,  $I_{zv}$ ,  $I_{xzv}$  en de massa's  $M_v$  en  $M_a$  van respectievelijk het voor- en achtergedeelte van de fiets met berijder. Tenslotte zal ook nog gebruikt worden het traagheidsmoment van het voorwiel  $I_{wv}$  en het achterwiel  $I_{wa}$  om hun respectievelijke assen.

4. De bewegingsvergelijkingen.

Bij het afleiden van de bewegingsvergelijkingen kan in het onderhavige geval met vrucht gebruik gemaakt worden van de methode van Lagrange, omdat hierbij het achteraf elimineren van de reactiekrachten, die vóór- en achtergedeelte van de fiets op elkaar uitoefenen, wordt vermeden, evenals het uitdrukken van de versnellingen in niet-cartesische coördinaten.

Door twee opmerkingen vooraf te maken, kan bij het opstellen van de vergelijkingen van Lagrange het rekenwerk vereenvoudigd worden.

Ten eerste kan men zich ontdoen van de coördinaat  $x$  en de hieruit volgende vergelijkingen van Lagrange.

In de richting van de  $X$ -as werken slechts krachten, die oneindig klein zijn van de 2e orde, n.l. de componenten in  $X$ -richting van de  $\infty$  kleine reactiekrachten in het grondvlak, loodrecht op de snijlijnen van de wielvlakken met het grondvlak. De versnelling en de variaties van  $V$ , de snelheid in  $X$ -richting, zijn dus  $\infty$  klein van de 2e orde. De term  $\frac{1}{2} MV^2$  kan men dus bij het opstellen van de bewegingsenergie voor de vergelijking van Lagrange weglaten. Hetzelfde geldt voor de rotatiesnelheden om de  $Y$ -assen, die ook oneindig klein zijn van de 2e orde, hetgeen onmiddellijk volgt uit vergelijkingen (10) en (11).

Ten tweede kan men de gyroscopische momenten ten gevolge van de draaiende wielen beter als uitwendige momenten, dus in de arbeidscoëfficiënten, verwerken, dan deze invloed als rotatie-energie invoeren in de bewegingsenergie  $T$ . Bij het berekenen van  $T$  zullen dan ook de wielen beschouwd worden alsof zij star aan het desbetreffende gedeelte van de fiets verbonden waren.

Nu zullen wij overgaan tot het uitdrukken van het arbeidsvermogen van het rijwiel  $T$  in de coördinaten  $y$ ,  $\theta$ ,  $\xi$  en  $\beta$ .

$$T = T_{za} + T_{oa} + T_{zv} + T_{ov} \dots \dots \dots (12)$$

$T_{za}$  = arbeidsvermogen van beweging van het achtergedeelte van de fiets ten gevolge van de translatie van het zwaartepunt daarvan;

$T_{oa}$  = arbeidsvermogen van beweging van het achtergedeelte ten gevolge van de rotaties om het zwaartepunt daarvan.

$T_{zv}$  en  $T_{ov}$  zijn de overeenkomstige grootheden van het voorgedeelte (stuur + vork + voorwiel).

In fig. 5 zijn de snelheden getekend waaraan  $C_a$  het zwaartepunt van het achtergedeelte deelneemt; in fig. 6 de snelheden van  $C_v$ ; in fig. 7 en 8 zijn de rotatiesnelheden getekend van respectievelijk het achter- en voorgedeelte van de fiets.

Aan de hand van deze figuren verifieert men gemakkelijk de volgende uitdrukkingen (grootheden van de 4e orde verwaarlozend):

$$T_{za} = \frac{1}{2} M_a (\dot{y} + h_a \dot{\xi} + u \dot{\theta})^2 \dots \dots \dots (13)$$

$$T_{zv} = \frac{1}{2} M_v \left( \dot{y} + f \dot{\beta} + (b-a) \dot{\theta} + h_v \dot{\xi} \right)^2 \dots \dots \dots (14)$$

$$T_{oa} = \frac{1}{2} I_{xa} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} I_{za} \dot{\theta}^2 + I_{xza} \dot{\xi} \dot{\theta} \dots \dots \dots (15)$$

$$T_{OV} = 1/2 I_{XV} (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon})^2 + 1/2 I_{ZV} (\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 + I_{XZV} (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon}) (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \dots \dots \dots (16)$$

De potentiële energie berekenen wij door de zakkings van de zwaartepunten in de gekozen coördinaten uit te drukken. Uit fig. 3, met behulp van de vergelijkingen (9), (10) en (11), vinden wij, dat  $C_a$  daalt:

$$U \Delta \alpha + 1/2 h_a \dot{\epsilon}^2 = \frac{pu}{b} (\epsilon \beta + 1/2 \beta^2 \cot \alpha) + 1/2 h_a \dot{\epsilon}^2$$

en dat  $C_v$  daalt:

$$-a \Delta \gamma + 1/2 h_v \dot{\delta}^2 = - \frac{a(b+p)}{b} (\epsilon \beta + 1/2 \beta^2 \cot \alpha) + 1/2 h_v (\dot{\epsilon} + \beta \cot \alpha)^2$$

zodat de potentiële energie bedraagt:

$$E_{pot} = - gM_a \left\{ \frac{pu}{b} (\epsilon \beta + 1/2 \beta^2 \cot \alpha) + 1/2 h_a \dot{\epsilon}^2 \right\} - gM_v \left\{ - \frac{a(b+p)}{b} (\epsilon \beta + 1/2 \beta^2 \cot \alpha) + 1/2 h_v (\dot{\epsilon} + \beta \cot \alpha)^2 \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Bij een willekeurige verplaatsing wordt echter ook nog arbeid verricht door de reactiekrachten  $P_a$  en  $P_v$  in het grondvlak, loodrecht op de snijlijnen van achterwielvlak met grondvlak en voorwielvlak met grondvlak. Deze krachten beletten het zijdelings slippen van de wielen.

Dan zijn er nog de gyroscopische momenten  $M_{XV}$ ,  $M_{ZV}$ ,  $M_{Xa}$  en  $M_{Za}$ , respectievelijk werkend op het voorgedeelte om X- en Z-as en op het achtergedeelte van de fiets om X en Z-as.

Bedoeld zijn hier de op blz. 6 beschreven assenkruisen, die met de fiets meebewegen. Indien de hoeksnelheden van de wielen  $\omega_v$  en  $\omega_a$  oneindig groot zijn ten opzichte van de hoeksnelheden  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\theta}$  en  $\dot{\delta}$  bedragen deze momenten (zie fig. 9 en 10):

$$M_{XV} = I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \dots \dots \dots (18)$$

$$M_{ZV} = I_{wv} \omega_v (\beta \cot \alpha + \dot{\epsilon}) \dots \dots \dots (19)$$

$$M_{Xa} = I_{wa} \omega_a \dot{\theta} \dots \dots \dots (20)$$

$$M_{Za} = I_{wa} \omega_a \dot{\epsilon} \dots \dots \dots (21)$$

De arbeidscoëfficiënten in de vergelijkingen van Lagrange luiden dus:

$$\alpha_y = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} + P_a + P_v = P_a + P_v \dots \dots \dots (22)$$

$$\alpha_\theta = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta} + bP_v + M_{za} + M_{zv} = bP_v + I_{wa} \omega_a \dot{\xi} + I_{wv} \omega_v (\beta \cot \alpha + \dot{\xi}) \dots \dots \dots (23)$$

$$\alpha_\xi = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \xi} - M_{xv} - M_{xa} = gM_a \left( \frac{pu}{b} \beta + h_a \xi \right) + gM_v \left\{ h_v (\xi + \beta \cot \alpha) - \frac{a(b+p)}{b} \beta \right\} - I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) - I_{wa} \omega_a \dot{\theta} \dots \dots \dots (24)$$

$$\alpha_\beta = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \beta} - pP_v + M_{zv} - M_{xv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = gM_a \frac{pu}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) + gM_v \left\{ h_v (\xi + \beta \cot \alpha) \cot \alpha - \frac{a(b+p)}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) \right\} - pP_v + I_{wv} \omega_v x (\beta \cot \alpha + \xi) - I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cot \alpha \dots \dots \dots (24a)$$

Nu kunnen wij dus overgaan tot het opstellen van de vergelijkingen van Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_y$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha_\theta$$

enz.

De tweede termen in deze vergelijkingen zijn alle = 0, omdat in de uitdrukking voor T alleen de fluxies der coördinaten voorkomen en niet deze coördinaten zelf.

Tenslotte vindt men dus:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\xi} + u \ddot{\theta}) + M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} = \alpha_y \dots \dots \dots (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\xi} + u \ddot{\theta}) u + M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} (b-a) \\ &\quad + I_{za} \ddot{\theta} + I_{xza} \ddot{\xi} + I_{zv} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv} (\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi}) \\ &= \alpha_{\theta} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} &= M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\xi} + u \ddot{\theta}) h_a + M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} h_v + \\ &\quad I_{xa} \ddot{\xi} + I_{xza} \ddot{\theta} + I_{xv} (\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi}) + I_{xzv} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) = \\ &= \alpha_{\xi} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} f + I_{xv} (\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi}) \cot \beta + \\ &\quad I_{zv} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv} (2 \ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi} + \ddot{\theta} \cot \alpha) = \\ &= \alpha_{\beta} \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

Hierbij komen nog de niet-holonome voorwaarden, dat zijdelings slippen van de wielen niet voorkomt:

$$v \dot{\theta} - \dot{y} = 0 \text{ en}$$

$$v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) - \dot{y} - b \dot{\theta} + p \dot{\beta} = 0$$

waaruit men afleidt:

$$\theta = \frac{v \beta + p \dot{\beta}}{b} \dots \dots \dots (29)$$

$$\ddot{y} = v \dot{\theta} = \frac{v}{b} (v \dot{\beta} + p \ddot{\beta}) \dots \dots \dots (30)$$

Met vergelijkingen (29) en (30) kan men  $\dot{\theta}$  en  $\ddot{y}$  invullen in de vergelijkingen (25) t/m (28), zodat  $\alpha_y, \alpha_{\theta}, \alpha_{\xi}$  en  $\alpha_{\beta}$  zijn uitgedrukt in  $\xi$  en  $\beta$  en hun afgeleiden naar de tijd. Deze uitdrukkingen kan men nu substitueren in de volgende, uit vergelijkingen (23) en (25) afgeleide vergelijking:

$$\begin{aligned} \alpha_{\beta} + \frac{p}{b} \alpha_{\theta} &= g M_a \frac{p u}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) + g M_v \left\{ h_v (\xi + \beta \cot \alpha) \cot \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{a(b+p)}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) \right\} + I_{wv} \omega_v \left( \frac{b+p}{b} \xi - \frac{v}{b} \beta \cot \alpha \right) \\ &\quad + \frac{p}{b} I_{wa} \omega_a \xi \end{aligned}$$

waaruit  $P_a$  en  $P_v$  geëlimineerd zijn, en in vergelijking (24).

Dit geeft twee vergelijkingen met  $\beta$  en  $\xi$  als onbekende functies. Gerangschikt naar  $\xi''$ ,  $\xi$ ,  $\xi$ ,  $\beta$ ,  $\beta$  en  $\beta$  zien deze twee vergelijkingen er als volgt uit:

$$\begin{aligned}
 & (I_{xa} + I_{xv} + h_v^2 M_v + h_a^2 M_a) \xi'' - g(h_a M_a + h_v M_v) \xi + \\
 & \left\{ \frac{P}{b} (I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + \sqrt{b-a} h_v M_v) + I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha \right. \\
 & \left. + h_v f M_v \right\} \beta + \left\{ I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b-a) h_v M_v + \right. \\
 & \left. P(h_a M_a + h_v M_v) + \frac{b+P}{b} I_{wv} \omega_v + \frac{P}{b} I_{wa} \omega_a \right\} \frac{v}{b} \dot{\beta} + \\
 & \left\{ (h_v M_v + h_a M_a) \frac{v^2}{b} - \frac{P}{b} (u M_a + \sqrt{b-a} M_v) g - g f M_v + \right. \\
 & \left. I_{wv} \omega_v \frac{v}{b} + I_{wa} \omega_a \frac{v}{b} \right\} \beta = 0 \dots \dots \dots (31)
 \end{aligned}$$

\* \* \*

$$\begin{aligned}
 & \left\{ I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v f M_v + \frac{P}{b} (I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b-a) \times \right. \\
 & \left. h_v M_v) \right\} \xi'' - \left\{ I_{wv} \omega_v + \frac{P}{b} (I_{wv} \omega_v + I_{wa} \omega_a) \right\} \dot{\xi} - \\
 & \left\{ \frac{P}{b} (u M_a + \sqrt{b-a} M_v) g + f g M_v \right\} \xi + \left\{ I_{xv} \cot^2 \alpha + \right. \\
 & \left. 2 I_{xzv} \cot \alpha + I_{zv} + f^2 M_v + \frac{P^2}{b^2} (I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + \sqrt{b-a}^2 M_v) \right. \\
 & \left. + \frac{2P}{b} (I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + \sqrt{b-a} f M_v) \right\} \beta + \left\{ I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha \right. \\
 & \left. + (b-a) f M_v + P f M_v + \frac{P}{b} (I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + \sqrt{b-a}^2 M_v) + \right. \\
 & \left. \frac{P^2}{b} (u M_a + \sqrt{b-a} M_v) \right\} \frac{v}{b} \dot{\beta} + \left\{ \left( \frac{pu}{b} M_a + \frac{P}{b} \sqrt{b-a} M_v \right) \right. \\
 & \left. \left( \frac{v^2}{b} - g \cot \alpha \right) + I_{wv} \omega_v \frac{v}{b} \cot \alpha \right\} \beta = 0 \dots \dots \dots (32)
 \end{aligned}$$

Dit zijn de op te lossen bewegingsvergelijkingen, die we kortheidshalve zullen schrijven als volgt:



$$a_1 \ddot{\xi} + a_3 \xi + a_4 \ddot{\beta} + a_5 \beta + a_6 \beta = 0 \dots (33)$$

$$b_1 \ddot{\xi} + b_2 \xi + b_3 \xi + b_4 \ddot{\beta} + b_5 \beta + b_6 \beta = 0 \dots (34)$$

De betekenis van de coëfficiënten  $a_1$  t/m  $b_6$  vindt men door vergelijking van de vergelijkingen (33) en (34) met de vergelijkingen (31) en (32).

Beschouwt men  $a_1$  nader, dan ziet men, dat deze uitdrukking voorstelt het traagheidsmoment van de gehele fiets met berijder om de wielbasislijn, indien de stuuruitslag = 0 is. Dit traagheidsmoment zullen wij aanduiden met  $I_x$ . Zo kunnen wij ook de in  $a_5$ ,  $a_4$  en  $b_1$  voorkomende uitdrukking

$$I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b-a) h_v M_v = I_{xz}$$

stellen, waarin  $I_{xz}$  het traagheidsproduct is van de gehele fiets met berijder ten opzichte van het assenkruis, dat gevormd wordt door de verticaal door het steunpunt van het achterwiel en de wielbasislijn, gemeten aan de fiets in verticale stand met stuuruitslag = 0. (zie fig. 11 en de daarbij behorende tabel).

Zo vindt men:

$$I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + (b-a)^2 M_v = I_z$$

$$M_v h_v + M_a h_a = S_x$$

$$M_v (b-a) + M_a u = S_z$$

Daarnaast voeren wij nog de volgende transformaties in:

$$\Delta = I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v f M_v = I_{as} \cot \alpha + I_{an} + k f M_v \dots (35)$$

$$\Gamma = I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + (b-a) f M_v = I_{as} - I_{an} \cot \alpha + j f M_v \dots (36)$$

De hierin voorkomende grootheden  $I_{as}$ ,  $I_{an}$ ,  $k$  en  $j$  zijn in fig. 11 en de tabel daarnaast gedefinieerd. Men verifieert vergelijkingen (35) en (36) gemakkelijk met behulp van fig. 11, waaruit o.a. volgt:

$$k = h_v - f \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{en}$$

$$j = b - a - f \sin^2 \alpha$$

In deze notatie (zie fig. 11) worden de coëfficiënten van vergelijkingen (33) en (34):

$$\begin{aligned}
 a_1 &= I_x ; & a_2 &= 0 ; & a_3 &= -gS_x ; & a_4 &= b_1 = \\
 & & & & & & & \frac{P}{b} I_{xz} + \Delta ; \\
 a_5 &= \frac{V}{b} \left[ I_{xz} + P S_x + \frac{b+P}{b} I_{wv} \frac{b}{r_v} + \frac{P}{b} I_{wa} \frac{b}{r_a} \right] \\
 a_6 &= \left( S_x + \frac{I_{wv}}{r_v} + \frac{I_{wa}}{r_a} \right) \frac{V^2}{b} - g \left( \frac{P}{b} S_z + fM_v \right) \\
 b_1 &= a_4 = \frac{P}{b} I_{xz} + \Delta \\
 b_2 &= -V \left[ \frac{b+P}{b} \frac{I_{wv}}{r_v} + \frac{P}{b} \frac{I_{wa}}{r_a} \right] \\
 b_3 &= -g \left( \frac{P}{b} S_z + fM_v \right) \\
 b_4 &= \frac{I_{as}}{\sin^2 \alpha} + \frac{P^2}{b^2} I_z + 2 \frac{P}{b} \sqrt{\phantom{x}} \\
 b_5 &= \frac{V}{b} \left[ \frac{P}{b} I_z + P \left( \frac{P}{b} S_z + fM_v \right) + \sqrt{\phantom{x}} \right] \\
 b_6 &= \left( \frac{P}{b} S_z + fM_v + \frac{I_{wv}}{r_v} \cot \alpha \right) \frac{V^2}{b} - g \left( \frac{P}{b} S_z + \right. \\
 & \quad \left. fM_v \right) \cot \alpha
 \end{aligned} \tag{37}$$

5. Afleiding der stabiliteitsvoorwaarden.

De vergelijkingen (33) en (34) lost men op door te stellen:

$$\xi = A e^{\lambda t} \dots \dots \dots (38)$$

$$\beta = B e^{\lambda t} \dots \dots \dots (39)$$

gesubstitueerd in vergelijkingen (33) en (34) geeft dit:

$$(a_1 \lambda^2 + a_3) A + (a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6) B = 0 \dots \dots (40)$$

$$(b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3) A + (b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6) B = 0 \dots \dots (41)$$

Deze vergelijkingen hebben als algemene oplossing  $A = B = 0$ , dus  $\beta = \xi = 0$ , dit is het zuiver verticaal en rechtuit rijden. Indien de vergelijkingen echter afhankelijk worden, zijn er ook andere oplossingen mogelijk. Dit is het geval, indien de determinant der coëfficiënten = 0 is.

$$\begin{vmatrix} a_1 \lambda^2 + a_3 & a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 \\ b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 & b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6 \end{vmatrix} = 0$$

Uitgeschreven:

$$\begin{aligned} & (a_1 b_4 - b_1 a_4) \lambda^4 + (a_1 b_5 - b_1 a_5 - b_2 a_4) \lambda^3 + \\ & (a_1 b_6 + a_3 b_4 - a_6 b_1 - b_2 a_5 - b_3 a_4) \lambda^2 + \\ & (a_3 b_5 - b_2 a_6 - b_3 a_5) \lambda + (a_3 b_6 - b_3 a_6) = 0 \quad \dots \quad (42) \end{aligned}$$

Deze vergelijking is identiek met vergelijking (2):

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Met een blik op vergelijkingen (38) en (39) overtuigt men zich ervan, dat voor stabiliteit noodzakelijk is, dat de reële gedeelten van de vier uit vergelijking (2) volgende waarden van  $\lambda$  negatief zijn. De nodige en voldoende voorwaarden voor het negatief zijn van de wortels van een vierde machtsvergelijking luiden nu in de hier gebruikte notaties:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_1 b_4 - b_1 a_4 > 0 \\ \alpha_1 &= a_1 b_5 - b_1 a_5 - b_2 a_4 > 0 \\ \alpha_3 &= a_3 b_5 - b_2 a_6 - b_3 a_5 > 0 \\ \alpha_4 &= a_3 b_6 - b_3 a_6 > 0 \\ \alpha_2 &= a_1 b_6 + a_3 b_4 - b_1 a_6 - b_2 a_5 - b_3 a_4 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \end{aligned}$$

Substitueert men in bovenstaande ongelijkheden de coëfficiënt  $a_1$  t/m  $b_6$  (zie vergelijking 37), dan vindt men de ongelijkheden (43) t/m (47) van de volgende paragraaf.

6. Conclusies, die uit de stabiliteitsvoorwaarden getrokken kunnen worden.

Voor het stabiel zijn van de rechtlijnig vooruitgaande beweging van een rijwiel met een star aan het frame verbonden, niet bewegende berijder, die het stuur niet aanraakt, moet voldaan zijn aan de hierna volgende vijf voorwaarden (43) t/m (47). De betekenis van de daarin voorkomende symbolen is geheel na te gaan aan de hand van fig. 11 en de daarnaast voorkomende tabel.

$$\alpha_0 = I_x^2 \left[ \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{P^2}{b^2} \left( \frac{I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x^2} \right) + 2 \frac{P}{b} \left( 1 - \frac{I_{xz}}{I_x} \cot \alpha \right) \frac{I_{as}}{I_x} \right. \\ \left. + 2 \frac{(j - \frac{I_{xz}}{I_x} k) fM_v}{I_x} \frac{P}{b} - 2 \left( \cot \alpha + \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \frac{I_{an}}{I_x} \frac{P}{b} - \frac{\Delta^2}{I_x^2} \right] > 0 \dots \dots \dots (43)$$

$$\alpha_1 = I_x^2 \left[ \left( \frac{I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x^2} - \frac{bS_x}{I_x} \cdot \frac{\Delta}{I_x} + \frac{bfM_v}{I_x} \right) \frac{P}{b} + \left( 1 - \frac{I_{xz}^2}{I_x} \cot \alpha \right) \times \right. \\ \left. \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{(j - \frac{I_{xz}}{I_x} k) fM_v}{I_x} - \left( \cot \alpha + \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \frac{I_{an}}{I_x} + \frac{P^2}{b^2} \left( \frac{bS_z}{I_x} - \frac{bS_x}{I_x} \cdot \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \right] \frac{V}{b} > 0 \dots \dots \dots (44)$$

$$\alpha_3 = I_x S_x \left[ \left( 1 + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \left( \frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \frac{P}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \frac{V^2}{bg} - \right. \\ \left. \frac{P}{b} \left( \frac{I_z}{I_x} - \frac{S_z}{S_x} \frac{I_{xz}}{I_x} \right) - \frac{(j - \frac{I_{xz}}{S_x}) fM_v}{I_x} - \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{I_{an}}{I_x} \cot \alpha \right] \frac{V}{S_x} \\ > 0 \dots \dots \dots (45)$$

$$\alpha_4 = S_x^2 g^2 \left[ \left( \frac{S_z}{S_x} \frac{P}{b} + \frac{fM_v}{S_x} \right) \left( \cot \alpha - \frac{S_z}{S_x} \frac{P}{b} - \frac{fM_v}{S_x} \right) - \right. \\ \left. \left( \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \cot \alpha - \left( \frac{S_z}{S_x} \frac{P}{b} + \frac{fM_v}{S_x} \right) \left( \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \right) \frac{V^2}{bg} \right] \\ > 0 \dots \dots \dots (46)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 = I_x S_x \left[ \frac{P}{b} \left( \frac{S_z}{S_x} - \frac{I_{xz}}{I_x} - \left( \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \frac{I_{xz}}{S_x} + \left( 1 + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \times \right. \right. \\
 \left. \left. \left( \frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \frac{P}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \right) \right] + \frac{fM_y}{S_x} + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \cot \alpha - \\
 \left( 1 + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \frac{\Delta}{I_x} + \left( \frac{I_{xz}}{b S_x} + \frac{b+p}{b} \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \right) \left( \frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \right. \\
 \left. \frac{P}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \left] \frac{v^2}{b} - I_x S_x g \left[ \left( \frac{P}{b} \frac{S_z}{S_x} + \frac{fM_y}{S_x} \right) \left\{ \cot \alpha - \right. \right. \\
 \left. \left. 2 \left( \frac{P}{b} \frac{I_{xz}}{I_x} + \frac{\Delta}{I_x} \right) \right\} + \frac{I_{as}}{I_x \sin^2 \alpha} + \frac{P^2}{b^2} \frac{I_z}{I_x} + 2 \frac{P}{b} \frac{\Gamma}{I_x} \right] \\
 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \dots \dots \dots (47)
 \end{aligned}$$

Vervangt men in deze ongelijkheden alle grootheden door hun getalwaarden (zie fig. 11), dan vindt men:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 = 32,1 \text{ kg}^2 \text{m}^4 ; > 0 ; \alpha_1 = 110 \frac{v}{b} \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-1} > 0 ; \\
 \alpha_3 = \left( 762 \frac{v^2}{bg} - 672 \right) \frac{v}{b} \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-3} > 0 ; \\
 \alpha_4 = \left( 7230 - 2310 \frac{v^2}{bg} \right) \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-4} > 0 ; \\
 \alpha_2 = \left( 1090 \frac{v^2}{bg} - 1145 \right) \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-2} > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \\
 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4
 \end{aligned} \quad (48)$$

Men ziet, dat er een bovengrens voor  $\frac{v^2}{bg}$  volgt uit  $\alpha_4 > 0$ , n.l.  $\frac{v^2}{bg} < 3,13$  en een benedengrens uit  $\alpha_3 > 0$  n.l.  $\frac{v^2}{bg} > 0,88$ .

Om echter aan de voorwaarde voor  $\alpha_2$  te voldoen,

moet  $\frac{v^2}{bg} > 1,71$ .

Indien dus  $3,13 > \frac{v^2}{bg} > 1,71$  of  $21,6 \text{ km/u} > v > 16 \text{ km/u}$

is aan alle vijf voorwaarden voldaan en in dit snelheidsgebied is de fiets van fig. 11 dus stabiel.

Om de grootte en de aard van de onstabieliteit buiten voornoemd snelheidsgebied te onderzoeken, beschouwen wij de vergelijking:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \dots \dots (2).$$

Deelt men alle coëfficiënten door  $\alpha_0$ , dan verkrijgt men:

$$\lambda^4 + 2,63 \frac{v}{b} \lambda^3 + (34 \frac{v^2}{bg} - 35,8) \lambda^2 + (23,7 \frac{v^2}{bg} - 20,9) \frac{v}{b} \lambda + 225 - 72 \frac{v^2}{bg} = 0 \dots \dots (49).$$

Voor elke waarde van V kan men de bijbehorende wortels van vergelijking (49) bepalen. Dit levert fig. 2 op, welke reeds in Par. 3 besproken is.

Het is dus vrij eenvoudig om met behulp van de ongelijkheden (43) t/m (47) de stabiliteitsgrenzen en het dynamisch gedrag van een willekeurige fiets te bepalen. Maar, wij willen meer. Wij willen weten welke maatregelen wij moeten nemen om b.v. de onderste stabiliteitsgrens van een bepaalde fiets omlaag te brengen en nog liever een antwoord op de vraag: "Hoe moeten wij de afmetingen van de fiets kiezen om het gunstigste resultaat te verkrijgen voor een bepaald doel?"

De ongelijkheden (43) t/m (47) zijn echter veel te onoverzichtelijk om er zonder meer algemene conclusies uit te trekken. Wel is het mogelijk om na te gaan hoe de stabiliteitsgrenzen veranderen als men van een bepaalde fiets één ding laat veranderen, b.v. het traagheidsmoment van het voorwiel  $I_w$ . Door deze verandering worden  $b, \alpha, j, h, I_x$ , enz. niet of slechts weinig beïnvloed. Voor al deze grootheden kan men dus de getalwaarden uit fig. 11 invullen, terwijl men voor  $I_{as}$  als goede benadering kan schrijven:

$$I_{as} = 1/2 I_w + (r \cos \alpha - p \sin \alpha)^2 M_w + I_s$$

$$\text{en voor } f = \frac{M_w}{M_v} (r \cot \alpha - p) - \frac{S_s}{M_v \sin \alpha}$$

Men verkrijgt zodoende:

$$\alpha_0 = 16,1 + 65,6 I_w > 0$$

$$\alpha_1 = (92 + 42I_w) \frac{V}{b} > 0$$

$$\alpha_3 = \left[ (3160 I_w + 212 I_w^2) \frac{V^2}{bg} - (574 + 404 I_w) \right] \frac{V}{b} > 0 \quad (50)$$

$$\alpha_4 = 7230 - 9440 I_w \frac{V^2}{bg} > 0$$

$$\alpha_2 = (604 + 1955 I_w) \frac{V^2}{bg} - 1013 - 538 I_w >$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4$$

Aan de eerste twee ongelijkheden is altijd voldaan. De drie andere ongelijkheden geven in een  $V - I_w$  diagram een lijn aan, die het diagram verdeelt in een gebied, waarin wél, en een gebied, waarin niet aan de betreffende gelijkheid is voldaan.

In fig. 12 zijn deze lijnen gegeven. De "verboden" zijde van de lijnen is gearceerd. Men ziet, dat de grenzen van het toelaatbare gebied worden gevormd door de vergelijkingen  $\alpha_4 = 0$  (bovengrens) en  $\alpha_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 +$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \text{ (ondergrens).}$$

Maakt men het traagheidsmoment van het wiel groter, dan dalen beide grenzen; maakt men het kleiner, dan stijgen de grenzen vrij snel.

In Par. 3 hebben we gezien, dat de bovengrens niet zo belangrijk is, omdat de optredende instabiliteit daarboven zeer gering is. Het is daarentegen voor langzaam fietsen wel van belang, dat de ondergrens laag ligt. Het is dus gewenst het voorwiel van de fiets niet te licht te maken, indien men gemakkelijke bestuurbaarheid bij lage snelheden verlangt.

Op geheel dezelfde wijze zijn in fig. 13 de stabiliteitsgrenzen als functie van de naloop  $P$  getekend, en wel voor drie waarden van de stuurashelling  $\alpha$ .

In dit geval brengt verkleining van  $P/b$  de stabiliteitsgrenzen omlaag en naar elkaar toe. Hetzelfde effect heeft verkleining van  $\cot \alpha$ . Door de naloop te verkleinen tot 3 tot 5 cm en  $\cot \alpha$  tot 0,1 (dit is een bijna verticale stuuras), kan men de onderste stabiliteitsgrens van 16 tot minder dan 11 km/u terugbrengen.

Deze veranderingen zouden echter het stuur 35 cm naar voren brengen en hieraan kan moeilijk tegemoet worden gekomen door het stuur naar achteren te verlengen. Twee andere eisen, die men uit de ongelijkheden kan afleiden, zijn n.l., dat het traagheidsmoment van het stuur (met vork, zonder wiel) om de stuuras zo klein mogelijk moet zijn en dat het zwaartepunt van het stuur niet te ver naar achteren mag komen te liggen.

Bij het afleiden van de hiervoor genoemde conclusies is verondersteld, dat wijzigingen van het stuurvoorwielgedeelte geen invloed hebben op de grootheden  $I_x$ ,  $I_{xz}$ ,  $I_z$ ,  $S$ ,  $S_z$ ,  $u$ ,  $h$ ,  $j$ ,  $k$  en  $M$ . Dit maakte de berekeningen vrij eenvoudig en de hierdoor gemaakte fouten zijn gering. Anders staat het met variaties in  $u$  en  $h$ .

Door verplaatsing van het zwaartepunt worden de traagheidsgrootheden sterk beïnvloed. Hoewel de invloed, vooral van voor- of achterwaartse verplaatsing van het zwaartepunt zeer belangwekkend is, zijn de hiervoor benodigde berekeningen niet uitgevoerd wegens de uitgebreidheid hiervan.

#### 7. Verdere uitbreiding van het stabiliteitsonderzoek.

Wij hebben gezien, dat er nog aanmerkelijke verbeteringen aan de huidige Nederlandse fiets mogelijk zijn, wat betreft het rijgemak bij lage snelheden. Dit is o.a. te bereiken door de naloop te verminderen tot ongeveer 4 cm, de stuuras meer verticaal te stellen, het voorwiel niet te licht te maken en het stuur en voorspatbord zo licht mogelijk uit te voeren.

Deze conclusies zijn afgeleid voor een fiets, waarop een onbeweeglijke berijder zit, die het stuur loslaat. Hoewel het zeer aannemelijk lijkt te veronderstellen, dat een fiets, die onder deze omstandigheden bij lage snelheid stabiel is, ook in werkelijkheid gemakkelijk te berijden is, is het gewenst de theorie uit te breiden voor het geval, dat de berijder wel ingrijpt door krachten op het stuur uit te oefenen en door zijdelings zijn zwaartepunt te verplaatsen.

Het moge op het eerste gezicht vreemd lijken het menselijk ingrijpen mathematisch te behandelen. Men mag evenwel aannemen, dat de mens op de eenvoudigste wijze zal trachten een onstabiele rijtoestand stabiel te maken.

Voorlopige berekeningen hebben aangetoond, dat een fiets bij een snelheid, die niet te ver onder de onderste stabiliteitsgrens ligt, stabiel gemaakt kan worden door met zwakke kracht de stuuruitslagen tegen te werken. Om hetzelfde effect met zijdelingse zwaartepuntsverplaatsing te bereiken, zou men zeer heftige bewegingen moeten maken.



De onstabilliteit bij hoge snelheid daarentegen is op te heffen door zeer kleine zijdelingse bewegingen, terwijl dit met het stuur slechts kan gebeuren door met grote kracht de eventueel aanwezige stuuruitslag trachten te vergroten.

Men zou in eerste aanleg kunnen veronderstellen, dat deze door de mens teweeg gebrachte krachten en verplaatsingen evenredig zijn met de stuuruitslag, zijdelingse helling, zijwaartse versnelling enz. Kiest men uit deze mogelijkheden de eenvoudigste en meest effectieve, dan is het zeer aannemelijk te veronderstellen, dat men het men het menselijk ingrijpen goed heeft benaderd. Men kan, hiermede rekening houdend, opnieuw de stabiliteitsvoorwaarden opstellen en daarmede wellicht nieuwe gezichtspunten ontdekken.

Men kan het onderzoek nog in een andere richting uitbreiden. Tot nu toe is verondersteld, dat het frame geheel stijf is. Iedereen, die wel eens met losse handen op een damesfiets heeft gereden, weet echter hoe nadelig een slap frame voor de stabiliteit kan zijn. Indien men rekening houdt met de torsiestijfheid van het frame, krijgt men inplaats van een 4e graads- een 6e graads vergelijking in  $\lambda$ , hetgeen wel meer bewerkelijk in de uitwerking der resultaten is, maar toch geen nieuwe principiële moeilijkheden oplevert.

Tot slot nog een opmerking over experimenteel stabiliteitsonderzoek.

Het is natuurlijk mogelijk om een fiets te construeren, waaraan men diverse grootheden, zoals stuurashelling, torsiestijfheid, naloop e.d., kan variëren.

In het licht van het onderhavige onderzoek, waaruit gebleken is hoe ingewikkeld de verschillende eigenschappen van de fiets de stabiliteit beïnvloeden, lijkt het onwaarschijnlijk, dat men op deze wijze tot duidelijke uitspraken zou kunnen komen.

INSTITUUT VOOR RIJWIELONTWIKKELING.

Ir. B.D. Herfkens.

September 1949.

\* \* \*

SZ

S-98-247-50-10-'49

50  
km/uur  
45  
40  
35  
30  
25  
20  
15  
10  
5

Fig. 2

De wortels  $a_1, a_2, a_3 + bi$  en  $a_3 - bi$  van de vierde  
graadsvergelijking:

$$\lambda^4 + 2.63 \frac{V}{b} \lambda^3 + [34 \frac{V^2}{bg} - 35.8] \lambda^2 + \frac{V}{b} [2.37 \frac{V^2}{bg} - 20.9] \lambda + 225 - 72 \frac{V^2}{bg} = 0$$

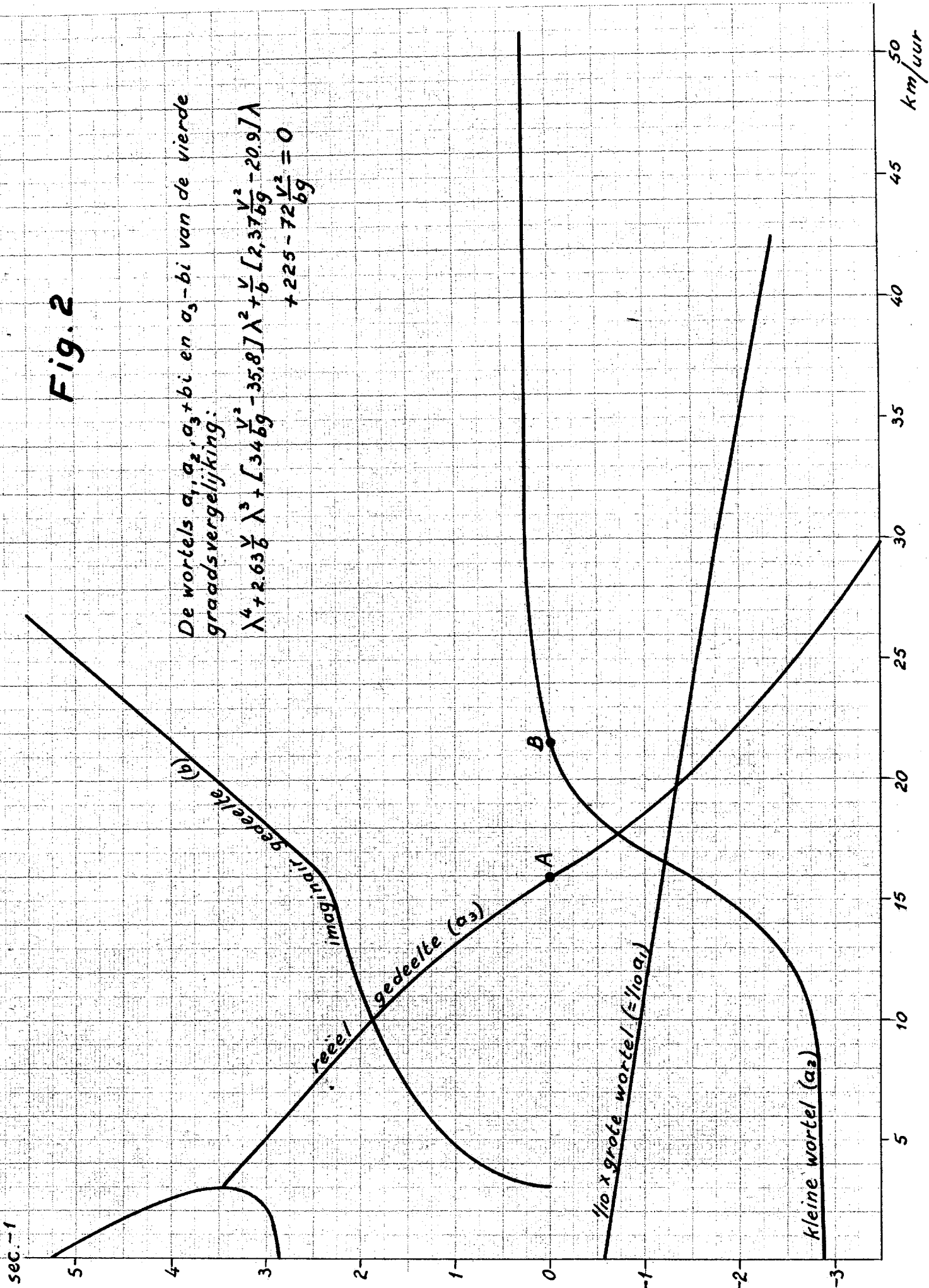


Fig.3

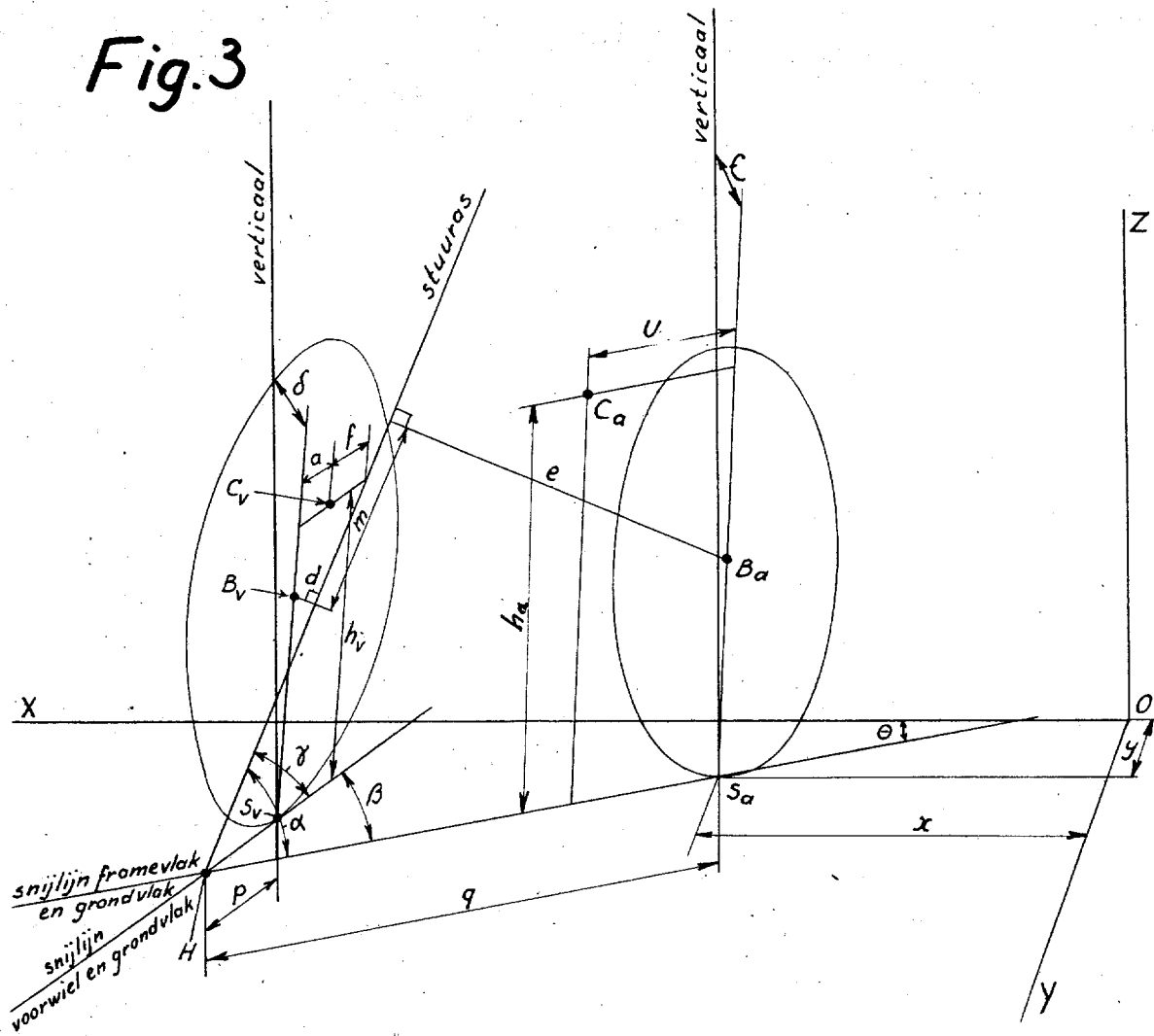
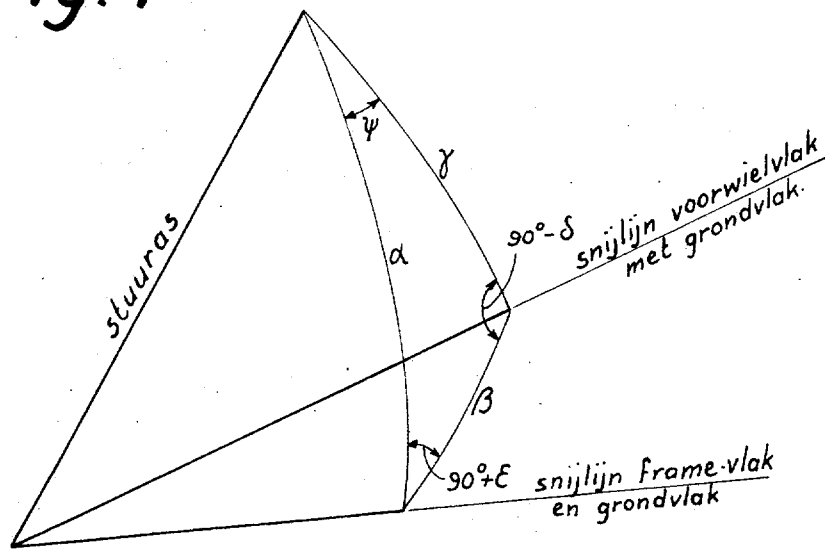


Fig.4



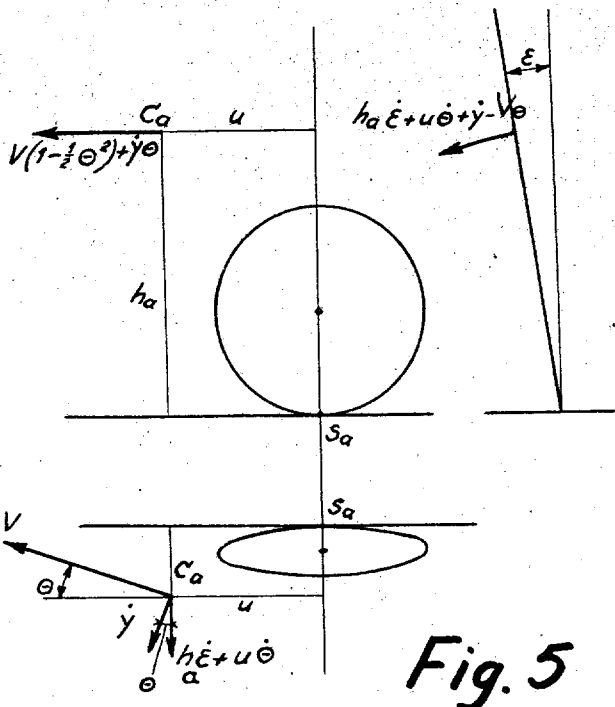


Fig. 5

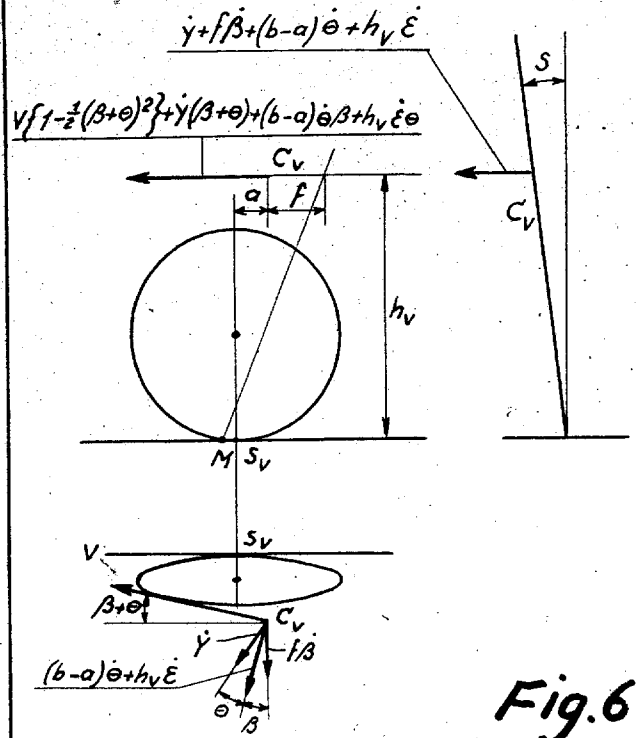


Fig. 6

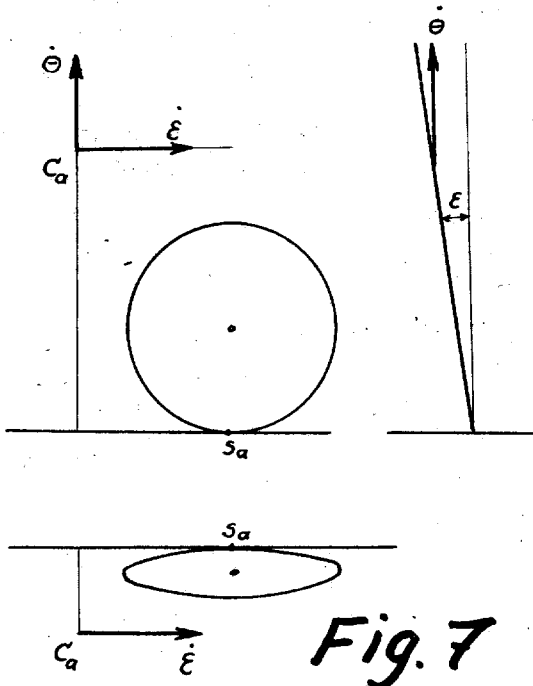


Fig. 7

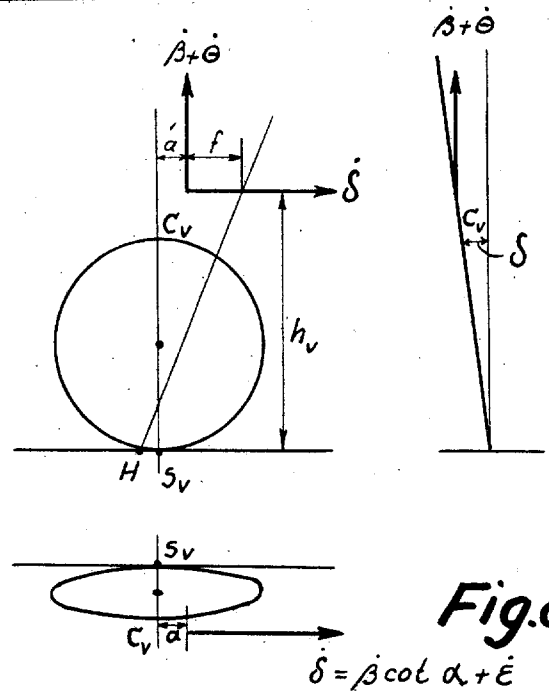


Fig. 8

$$\delta = \beta \cot \alpha + \dot{\epsilon}$$

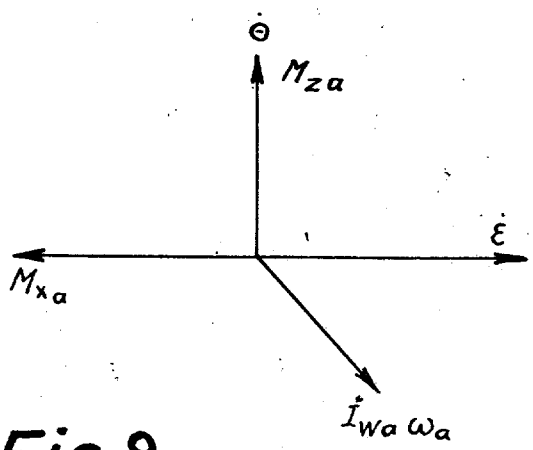


Fig. 9

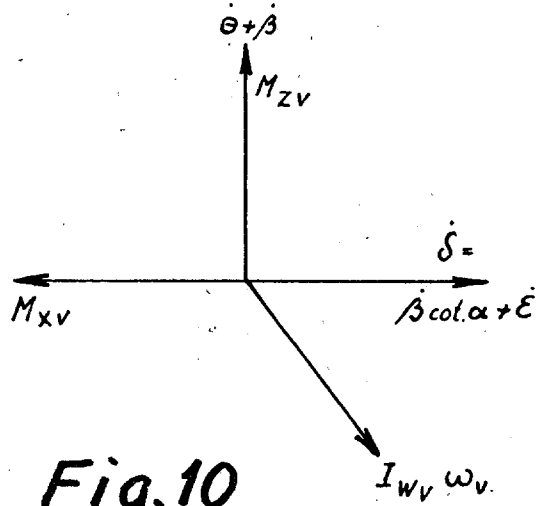
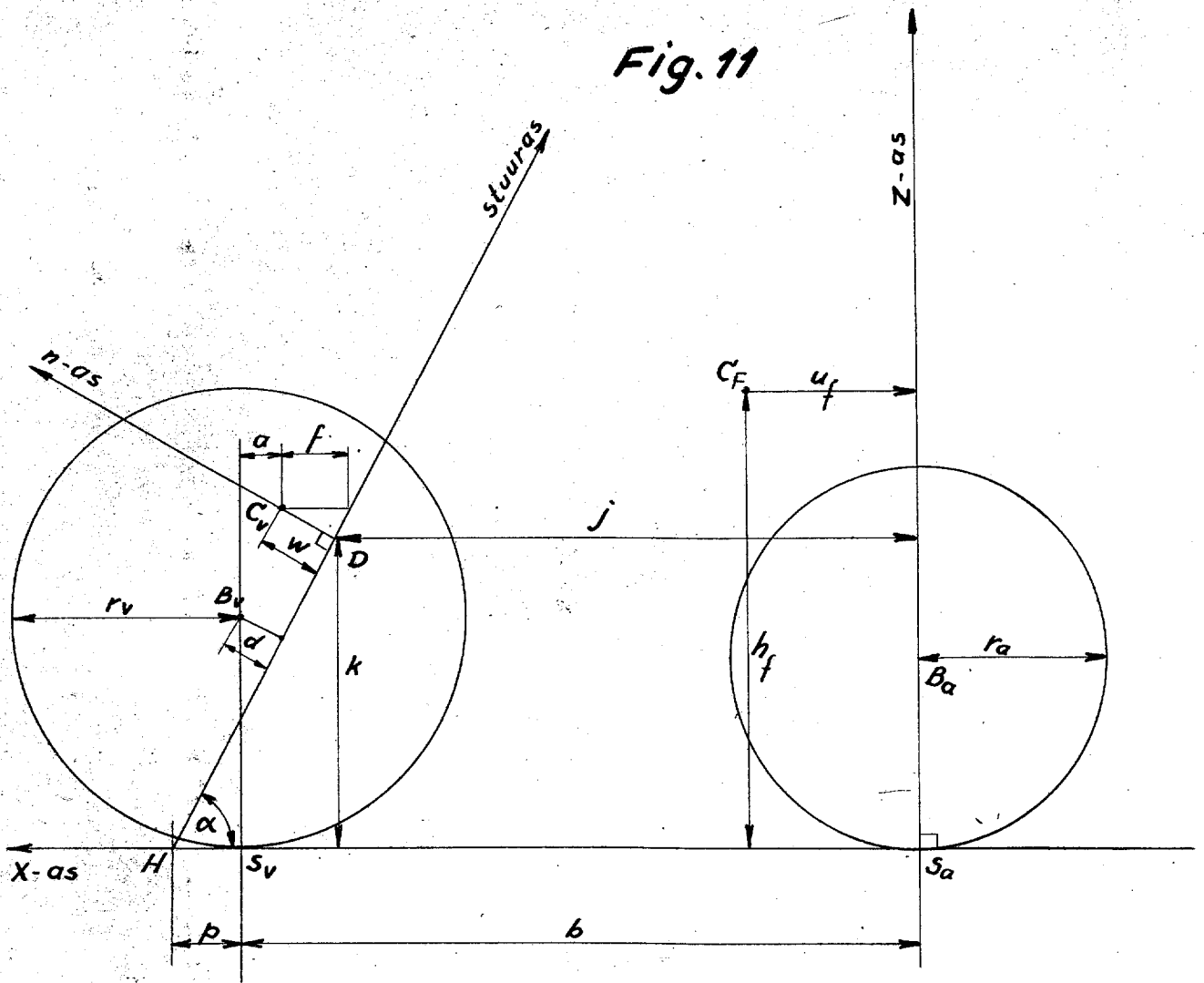


Fig. 10

Fig. 11



- $C_f$  is het zwaartepunt van de gehele fiets met berijder
- $C_v$  " " " " al die delen van de fiets, die met het stuur meebewegen, zoals voorwiel, voorvork, binnenbalhoofdbuis en stuur.
- H is het snijpunt van de stuuras met de grond
- $S_v$  is het steunpunt van het voorwiel
- $S_a$  " " " " " " achterwiel
- $B_a$  " " middelpunt van het achterwiel
- $B_v$  " " " " " " voorwiel
- D " " voetpunt van de loodlijn uit  $C_v$  op de stuuras neergelaten.
- $\nabla = I_{as} - I_{an} \cot \alpha + j f M_v$
- $\triangle = I_{as} \cot \alpha + I_{an} + k f M_v$

Symbool	Betekenis	waarde bij de gemiddelde Ned. fiets
$r_v$	straal van het voorwiel	0,35 m
$r_a$	" " " achterwiel	0,35 m
$b$	wielbasis = afstand $S_v S_a$	1,17 m
$p$	naloop = afstand $HS_v$ , de naloop is negatief als $S_v$ vóór H ligt	0,08 m
$a$	horizontale afstand tussen $C_v$ en de verticaal door $S_v$	0,12 m
$u_f$	afstand van $C_A$ tot de verticaal door $S_A$ en $B_A$ (de Z as)	0,33 m
$h_f$	" " $C_A$ tot het grondvlak (tot de X as)	1,00 m
$j$	" " D tot de Z as	1,00 m
$k$	" " D tot de X as (tot het grondvlak)	0,52 m
$d$	" " $B_v$ tot de stuuras	0,08 m
$w$	" " $C_v$ " " " " = $C_v D$	0,03 m
$f$	= $\frac{w}{\sin \alpha}$ , de afstand van $C_v$ tot de stuuras, horizontaal gemeten	0,04 m
$\alpha$	hoek tussen stuuras en het grondvlak	65 °
$g$	versnelling voor de zwaartekracht	9,81 m/sec <sup>2</sup>
$M$	massa van de gehele fiets met berijder	82,5 kg <sup>1)</sup>
$M_v$	" " het stuur-voorvork-voorwielgedeelte	5,55 kg
$M_{wa}$	" " het achterwiel	2,65 kg
$M_{wv}$	" " het voorwiel	2,65 kg
$I_{wa}$	traagheidsmoment van het achterwiel om zijn as	0,245 kgm <sup>2</sup>
$I_{wv}$	" " " " voorwiel om zijn as	0,245 kgm <sup>2</sup>
$I_x$	" van de gehele fiets + berijder om de X as	98 kgm <sup>2</sup>
$I_z$	" " " " " " " " Z "	14,7 kgm <sup>2</sup>
$I_{xz}$	traagh.prod." " " " " t.o.v. X en Z as	23,5 kgm <sup>2</sup>
$I_{as}$	traagh.mom. van stuur-voorwielgedeelte om de stuuras	0,195 kgm <sup>2</sup>
$I_{an}$	" prod. " " " " t.o.v. stuuras en n-as	-0,04 kgm <sup>2</sup>
$I_s$	" mom. " stuur, vork, spatbord, lamp enz. zonder wiel	0,05
$S_x$	= $Mh_f$ het statisch moment v.d. gehele fiets m. berijder om X as	82,5 kgm
$S_z$	= $Mu_f$ " " " " " " " " om Z as	27,2 "
$S_s$	= statisch moment van stuur, spatbord, lamp, enz. om de stuuras	0,005 "

1) de kg als massa-eenheid, niet als kracht

Fig. 12

$V/\text{kg}$   
- 2,5

km/h  
19

V  
km/h  
18

$V^2/\text{kg}$

20

17

16

15

14

13

10

0,5

0,3

0,4

0,5

0,6

0,7

0,8

0,9

1,0

$I_w \text{ in } K_{um}$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = \frac{0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,4}{0,1 \cdot 0,3}$

$\alpha_3 = 0$

$\alpha_3 = 0$

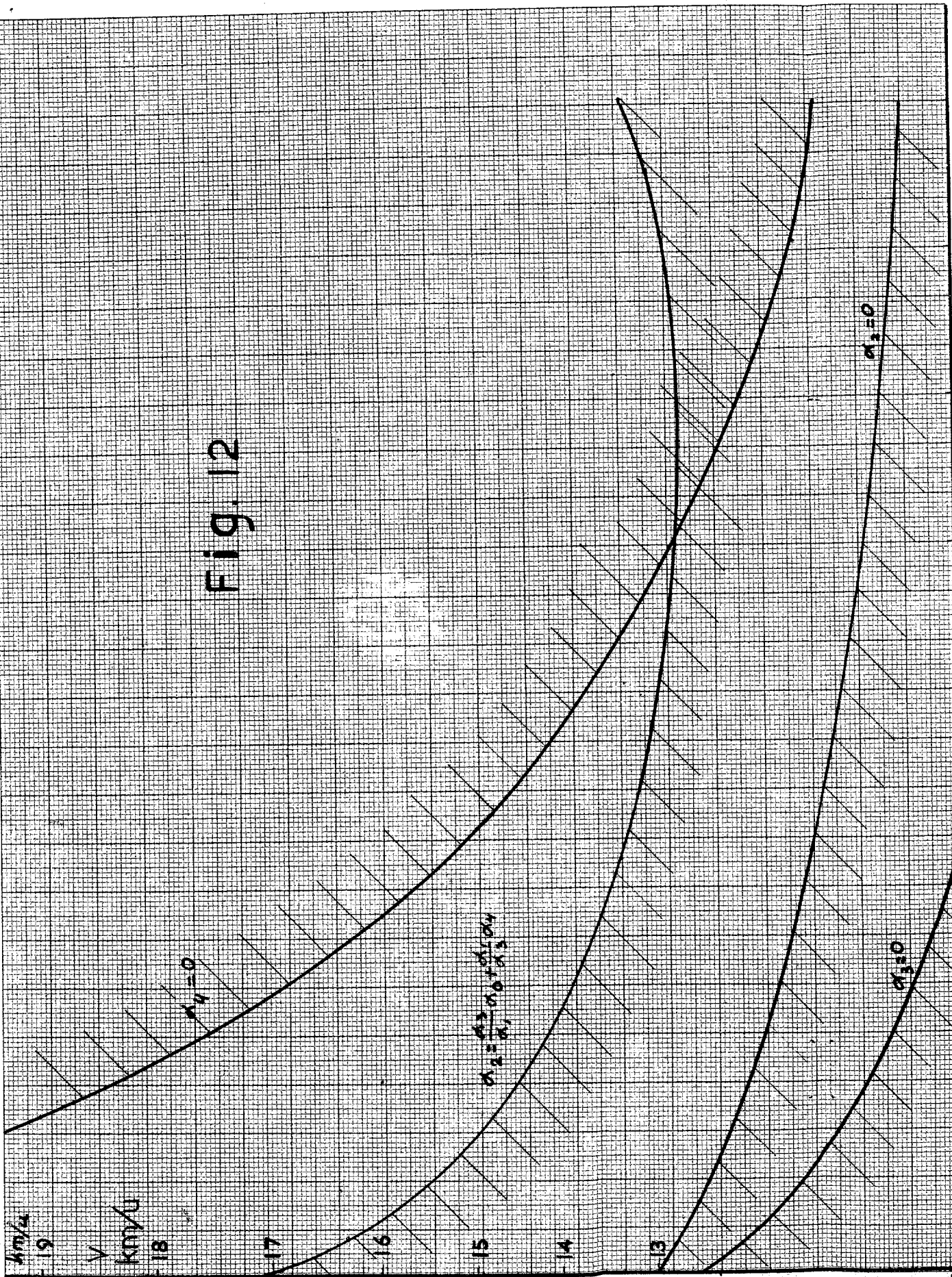


Fig. 13

