

F. KLEIN UND A. SOMMERFELD,
ÜBER DIE
THEORIE DES KREISELS.

HEFT IV.
DIE TECHNISCHEN ANWENDUNGEN DER KREISELTHEORIE.

FÜR DEN DRUCK BEARBEITET UND ERGÄNZT VON
FRITZ NOETHER.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1910.

COPYRIGHT 1910 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Anzeige von Heft IV der Kreiseltheorie.

Ursprünglich bestand die Absicht, in diesem Schlussheft neben den technischen Anwendungen die Bedeutung der Kreiseltheorie für die allgemeine Mechanik und Physik zu schildern, im Anschluß an Gedankengänge, die namentlich von Maxwell, Lord Kelvin, Helmholtz, J. J. Thomson herrühren. Hiervon wurde indessen Abstand genommen, einmal weil die Methode der mechanischen Modelle nach heutiger Auffassung doch nicht diejenige Bedeutung für die allgemeine Naturwissenschaft zu haben scheint, die ihr noch vor zehn Jahren beigelegt wurde, sodann deshalb, weil die allgemeinen analytischen Entwicklungen über zyklische Systeme, generalisierte Koordinaten etc. durch neuere Darstellungen bereits zum Allgemeingut der Wissenschaft geworden sind.

Statt dessen schien es nützlicher, dieses Schlussheft ausschließlich den *technischen Anwendungen der Kreiseltheorie* zu widmen, Anwendungen, die sämtlich noch im Fluß der Entwicklung stehen und eine große Zukunft versprechen. Dahin gehört die Kreiselwirkung bei Schnellbahnen, der Geradlaufapparat des Torpedos, der Kreiselkompaß, der Schlick'sche Schiffskreisel, die Einschienenbahn. Ferner kommen zur Besprechung die Stabilität des Fahrrads, Kreiselwirkungen beim Turbinenbetrieb, in der Ballistik u. a. m.

Die eigentliche Schwierigkeit aller dieser Probleme liegt auf dem Gebiet der technischen Durchführung, der Ausschaltung störender Einflüsse und der Beherrschung des Materials; ihre theoretische Behandlung kommt meist mit verhältnismäßig elementaren Hilfsmitteln aus. Dementsprechend ist die Signatur dieses Teiles eine mathematisch viel einfachere wie die der vorangehenden Hefte. Die weitergehenden analytischen und geometrischen Methoden des ersten und zweiten Heftes werden entbehrlich; dagegen bewährt sich die von Anfang an gewählte konkrete Form der mechanischen Grundbegriffe hier in besonderem Maße. Ihre Einfachheit wird es dem Leser ermöglichen, diesen Schlussteil gegebenfalls auch ohne genaueres Studium der vorangehenden Teile zu benutzen.

Eine ausgiebige Berücksichtigung auch der technischen Anwendungen war offenbar unumgänglich, wenn die ursprüngliche Absicht des ganzen Werkes erreicht werden sollte: Am Beispiel des Kreisels die Mechanik in ihren mannigfachen Beziehungen zu den mathematischen Disziplinen einerseits, den Naturwissenschaften andererseits darzustellen.

Das Manuskript dieses Heftes stammt zum Teil (§ 2, 3 und Teile von § 10) schon aus dem Jahre 1900. Durch mannigfache andere Verpflichtungen wurde ich aber immer wieder von diesem Thema abgezogen. Auch jetzt wäre die Arbeit kaum zu Ende geführt, wenn ich nicht in Herrn Dr. Fritz Noether einen selbständigen, in der Mechanik geschulten Mitarbeiter gefunden hätte, dem ich herzlich für seine Ausdauer und Arbeitsfreudigkeit danke. Das Manuskript zu den §§ 5 bis 8 und § 10 Nr. 3 rührt von ihm her und wurde von mir nur stilistisch überarbeitet. Insbesondere sind die neuen Entwicklungen zum Schiffskreisel (§ 5) und die Behandlung des Fahrrades (§ 8) sein geistiges Eigentum. Auch die von mir herrührenden Teile des Manuskriptes sind von ihm kritisch durchgearbeitet und ergänzt worden. Herr F. Klein mußte seine Mitwirkung bei diesem Heft wegen anderweitiger starker Beanspruchung leider fast ganz ausschalten.

Bei der Korrektur bin ich außer durch Herrn Noether und Herrn cand. math. Behrens von einer Reihe technischer Fachmänner unterstützt worden. Es sind dieses die Herren

Dr. Anschütz-Kämpfe	für § 7,
Geheimrat Cranz	„ § 10 Nr. 7 u. 8,
Torpedo-Oberingenieur Diegel	„ § 3,
Konsul Dr. Schlick	„ § 4 bis 6,
Dr. Schuler	„ § 7,
Professor Skutsch	„ § 2 u. 6,
Dr. Thoma	„ § 10 Nr. 5.

Für ihre vielfachen wertvollen Hinweise sage ich aufrichtigen Dank.

München, April 1910.

A. Sommerfeld.

durch die Rollbewegungen des Schiffes übertragen werden können. Doch ist deren Wirkung durch Aufhängen des ganzen Systems an sehr langen Federn ausgeschaltet worden.

Aus Allem ist zu entnehmen, daß der Kreiselkompaß in der That einen wirklich brauchbaren Ersatz für den Magnetkompaß bietet. Allerdings dürften die vorläufig sehr hohen Kosten der Einführung bei der Handelsmarine zunächst im Wege stehen*) und sein Verwendungsgebiet der Hauptsache nach auf die Kriegsmarine beschränken, für die nach den eingangs geschilderten Verhältnissen ein nicht-magnetischer Richtungsweiser geradezu eine Lebensfrage bildet.

§ 8. Stabilität des Fahrrads.

Die wesentlichste Frage bei der Konstruktion der modernen Zweiräder, die nach der Energie, die der Fahrer zur Erzielung der verhältnismäßig großen Geschwindigkeit aufwenden muß, ist theoretisch vielfach behandelt worden.***) Die größere Energieersparnis, sowie die leichtere Lenkbarkeit sind der wesentliche Vorteil des Zweirades vor dem Dreirade. Mit den genannten Vorzügen ist aber der Nachteil verbunden, daß in der aufrechten Stellung der Schwerpunkt sich in labilem Gleichgewicht befindet. Um die Gleichgewichtslage bei äußeren Störungen dennoch einhalten zu können, ist eine Erlernung des Radfahrens nötig, die allerdings durch besondere Konstruktionen des modernen Fahrrads erleichtert wird.

Tragen nun zur Stabilisierung der aufrechten Lage bei genügender Geschwindigkeit auch die Kreiselwirkungen der rotierenden Räder in nennenswertem Betrage bei, indem, in der herkömmlichen Bezeichnungsweise, die Rotationsachsen bestrebt sind, ihre Richtung im Raume beizubehalten? Im Hinblick auf die geringe Masse der Räder gegenüber der Masse des ganzen, von Fahrer und Rad gebildeten Systems möchte man eine solche Wirkung bezweifeln. Und offenbar liegt es auch nicht in der Absicht des Fabrikanten, sie zu verstärken, da ja sein Bestreben dahin geht, im Interesse der Energieersparnis alle Teile des Fahrrads möglichst leicht zu bauen, während eine Vergrößerung der Radmassen der Stabilisierung durch Kreiselwirkungen zu statten käme.

Jedenfalls müssen wir auch an dieser Stelle betonen, daß die Kreiselwirkungen nur dann in Kraft treten können, wenn das System die

*) Vgl. die Diskussion zu dem eingangs zitierten Vortrag von Anschütz in der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Jahrbuch X, pag. 361.

***) Vgl. Encyclopädie der math. Wiss. Bd. IV, Nr. 9 (Walker, Spiel und Sport), pag. 149.

genügenden Freiheitsgrade besitzt. Für ein „Einrad“, d. h. eine einzelne rollende Scheibe, ist die Stabilisierung zweifellos möglich, wie die theoretische Berechnung in Übereinstimmung mit der Erfahrung bestätigen würde. Bei genügender Geschwindigkeit ist die rollende Bewegung einer solchen Scheibe bei vertikaler Ebene stabil.*) Hier kann die Bewegung als fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts, verbunden mit einer Kreiselbewegung um den Schwerpunkt, aufgefasst werden, und die letztere ist ja aus den früheren Untersuchungen dieses Buches als stabil bereits bekannt.

Die relativ größte Ähnlichkeit mit einer einfachen Scheibe hatten die ursprünglich vielgebrauchten „Hochräder“, bei denen zu dem großen Vorderrad, das der einzelnen Scheibe entspricht, nur ein kleines Hinterrad tritt, um den Sitz des Fahrers zu stützen und die Lenkung zu ermöglichen. Das Hinterrad würde aber die Zahl der Freiheitsgrade des Systems um eins vermindern und dadurch die Stabilisierung unmöglich machen, wenn nicht die drehbare Lenkstange die Verdrehung der Vorderradebene gegen die des Hinterrades erlaubte. Bei Feststellung der Lenkstange hätte das ganze System nur noch zwei Freiheitsgrade, das Umkippen um die horizontale Spurlinie und die mit Raddrehung verbundene Vorwärtsbewegung, und damit fiel jede Möglichkeit der Stabilisierung durch die Kreiselwirkungen fort. Das heutige Zweirad nun ist nur in den Größenverhältnissen von dem Hochrad verschieden; die beiden Räder sind gleich groß und die Masse der Räder ist viel kleiner im Verhältnis zur Gesamtmasse. Daher wird auch der Einfluss der Kreiselwirkungen abgeschwächt.

Der dritte Freiheitsgrad, die Drehung um die Lenkstange, ermöglicht aber nicht nur die Kreiselwirkungen, sondern auch die Hilfen, die der Fahrer zur Aufrechterhaltung des Rades selbst geben kann und die der gelernte Fahrer unwillkürlich anwendet. Die ursprüngliche Theorie des Fahrrads, die von Rankine herrührt**), berücksichtigte nur diese, vom Fahrer selbst ausgeführte Stabilisierung. Neigt sich etwa das ganze Rad auf die rechte Seite, so wird der Fahrer das Vorderrad nach eben dieser Seite drehen und dadurch das Rad zwingen, nach rechts auszubiegen. Die durch die Wendung entstehende, im Schwerpunkt angreifende Centrifugalkraft hat ein Moment um die Spurlinie, das die Radebene wieder aufrichtet. Um nun ein Überfallen nach der linken Seite zu vermeiden, muß der Fahrer die Lenkstange wieder nach links drehen usw. Gerade weil auch diese künstliche Stabilisierung die Existenz des dritten Freiheitsgrades, der Drehung um die Lenk-

*) Vgl. Carvallo, Journ. de l'Ecole polyt. 2. Ser., 5. Heft, 1900.

**) Theory of bicycle, Engineer 1869.

stange, notwendig voraussetzt, ist es schwer zu entscheiden, welcher Anteil an der Stabilierung auf die Kreiselwirkungen, welcher auf die unwillkürlichen Bewegungen des Fahrers entfällt. Gegen die bedingungslose Annahme dieser Theorie wird der Fahrer einwenden, daß er sich durchaus nicht einer beständigen Führung der Lenkstange bewußt ist, daß er ja auch, ohne sie zu berühren, sicher zu fahren im Stande ist und die Lenkstange mehr, um ein Umkippen des Vorderrads zu verhindern, führt, als zur Stabilierung seiner aufrechten Lage. Er kann ja übrigens auch durch unwillkürliche seitliche Neigungen des Körpers ein Schweremoment erzeugen, das ein Umfallen verhindert.

Es bleibe dahingestellt, inwieweit die Stabilierung durch kleine Bewegungen des Fahrers selbst erreicht werden kann, darüber könnte vielleicht das Experiment entscheiden. Für alle Fälle aber wird es von Interesse sein, zu untersuchen, in welchem Grade überhaupt Eigenstabilierung des Fahrrads ohne Bewegungen des Fahrers möglich ist, und wieweit dabei Kreiselwirkungen mitspielen. Der Stabilierungsvorgang ist dann der, daß eben die von Rankine besprochenen Hilfen teilweise die Kreiselwirkungen selbstthätig übernehmen, unterstützt durch geeignete Konstruktionen des Rades, die noch zu besprechen sind. Die Frage, wie weit das Rad ohne Zuthun des Fahrers stabilisiert ist, unter der Annahme also, daß der Fahrer starr mit dem Rahmen des Rades verbunden ist und die Lenkstange nicht in der Hand hält, ist von Whipple*) und Carvallo**) behandelt. Wir werden im Folgenden zu untersuchen haben, in welchem Grade an dieser Stabilierung die Kreiselwirkungen beteiligt sind. Dabei werden wir natürlich von allen Nebenumständen (einseitiger Antrieb durch die Pedale, Nachgiebigkeit des Pneumatik und die dadurch bedingte endliche Berührungsfläche mit dem Boden, Reibung an der Lenkstange, bohrende Reibung am Boden usw.) absehen.

Bei Whipple und Carvallo sind die allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen erster, bzw. zweiter Art aufgestellt, die letzteren entsprechend modifiziert, da es sich um ein „nicht holonomes System“ handelt, und diese für den Fall der kleinen Schwingungen um die geradlinige aufrechte Fahrt spezialisiert. Wir hoffen, den mechanischen Zusammenhang besser hervortreten zu lassen, wenn wir zur Ableitung entsprechender Näherungsgleichungen, ähnlich wie es bei den früher besprochenen Anwendungen geschehen, zu den Kräften, die im Falle der Ruhe auf das System wirken, die von der Bewegung hervorgerufenen Kreiselwirkungen und Centrifugalkräfte zufügen. Es ist

*) Quart. Journ. of Math., Nr. 120, 1899.

**) Journal de l'Ecole polytechnique, 2. Ser. 6. Heft 1901.

dabei wieder ausreichend, um die Glieder erster Ordnung in den Schwingungen zu erhalten, den vereinfachten Ausdruck (I) der Kreiselwirkung, pag. 764, zu verwenden. Wenn wir quadratische Glieder in den kleinen Schwingungen vernachlässigen, so bemerken wir noch, daß die Größe der überhaupt in Betracht kommenden Ausschläge völlig innerhalb der Grenze liegen, für die diese Näherung bei der hier zu fordernden Genauigkeit ausreicht.

Die so zu erhaltenden Gleichungen stimmen mit denen von Whipple und Carvallo überein. Aus ihnen ist zu folgern: Die Bewegung ergibt sich für kleine Geschwindigkeiten naturgemäß als labil. Für gewisse mittlere Geschwindigkeiten aber wird die Bewegung stabil, d. h. die Schwingungen können in der Form

$$Ae^{\lambda t}$$

dargestellt werden, wo λ eine komplexe Größe mit negativ reellem Teil bezeichnet. Whipple findet unter Zahlenannahmen, die einem modernen Fahrrad besser entsprechen, als die von Carvallo, für dieses Gebiet etwa die Geschwindigkeiten von

$$16 \text{ kmh}^{-1} \text{ bis } 20 \text{ kmh}^{-1}$$

also Geschwindigkeiten, die leicht erreichbar sind. Für größere Geschwindigkeiten wird die Bewegung, was paradox erscheinen könnte, wieder labil, doch wird sich aus der Art, wie die einzelnen Bestandteile des Systems gekoppelt sind, diese Erscheinung leicht erklären. Praktisch ist übrigens die letzte Labilität nur eine schwache und kann durch fast unmerkliche Bewegungen des Fahrers, auch ohne Berührung der Lenkstange, aufgehoben werden.

Uns interessiert hier der Beitrag der Kreiselwirkungen zu den erwähnten Resultaten. Wir werden zeigen, was bei den genannten Autoren nicht verfolgt ist, daß bei Fortfall der Kreiselwirkungen das Gebiet der vollständigen Stabilität verschwinden würde, daß also die Kreiselwirkungen trotz ihrer Kleinheit für die selbständige Stabilisierung unentbehrlich sind.

Das Zweirad (Fig. 135) besteht im Wesentlichen aus dem Rahmen, der das in seiner Ebene gelagerte Hinterrad trägt, und der Lenkstange, deren Axe das Vorderrad trägt. Da die Lenkstange durch einen festen Tubus der Rahmenebene geführt ist, so handelt es sich um zwei ebene Systeme, die, um eine gemeinsame Axe drehbar, verbunden sind. Mit dem Rahmen denken wir uns auch den Fahrer starr verbunden. Die Drehaxe der Lenkstange ist bei den modernen Rädern nach rückwärts geneigt, und zwar so geführt, daß ihre Verlängerung die durch den Berührungspunkt B_1 des Vorderrads gezogene Vertikale B_1S_1

zwischen diesem und dem Mittelpunkt S_1 schneidet (Fig. 135), so daß also die Verlängerung den Boden vor dem Berührungspunkt trifft. Wie Bourlet*) hervorhebt, wird durch diese Führung der Lenkstange das Umfallen des Vorderrads erschwert, wenn man sich das Hinterrad geführt oder, durch Schwerpunktsverlegung des Fahrers, bis zu einem gewissen Grade aufrecht gehalten denkt. Ein näheres Eingehen auf die Folgen dieser nicht unwesentlichen Anordnung wird hier entbehrlich sein, weil sich ihr Einfluss in

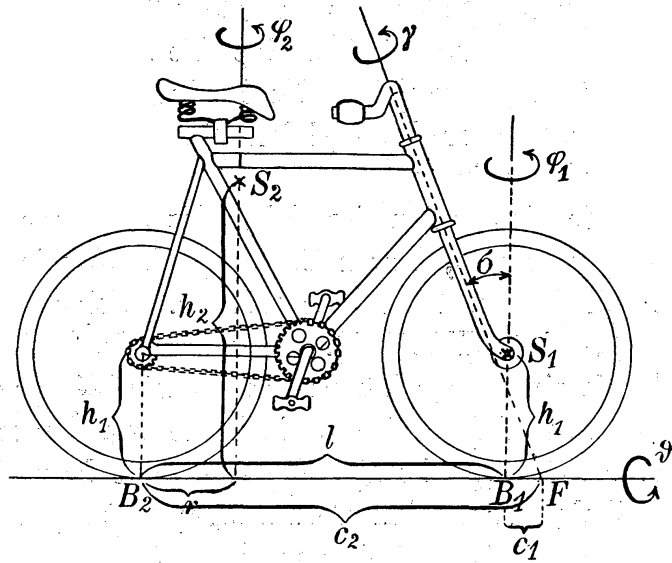


Fig. 135.

unserer späteren analytischen Behandlung natürlich von selbst zeigt.

Nach dem beschriebenen kinematischen Zusammenhang zwischen Vorder- und Hinterrad können wir in irgend einem Moment etwa die Lage der Rahmenebene willkürlich vorgeben (2 Koordinaten für den Berührungspunkt, 2 Koordinaten für die Lage der Rahmenebene), ferner die Verdrehung der Vorderradebene gegen die Rahmenebene (1 Koordinate). Die Lage des ganzen Rades ist hiernach bereits bestimmt, da noch die Bedingung hinzukommt, daß beide Räder den Boden berühren müssen, sie hat also, bei Ignorierung der cyklischen Koordinaten, die in den beiden Ebenen die Stellung der Räder um ihren Mittelpunkt festlegen, im Ganzen 5 Freiheitsgrade der Lage. Die Bewegungsmöglichkeit des Rades ist zunächst eine Neigung seiner Rahmenebene, dann eine Verdrehung des Vorderrades um die Lenkstange. Da die Bewegung der beiden Räder eine rollende sein soll, so ist durch die Lage der Vorderradebene auch seine Bewegungsrichtung bestimmt, dadurch ist dann die Bewegung der Lenkstange gegeben, und also auch die Bewegung der mit der Lenkstange verbundenen Hinterradebene. Willkürlich bleibt nur noch die Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung. Das Rad hat also 3 Bewegungsfreiheiten.

Wir lernen hier das charakteristische Merkmal von nicht holonomen Systemen**) kennen, zu denen alle rollenden Bewegungen gehören: Das

*) In dem anziehenden kleinen Buche: Nouveau traité des bicycles et bicyclettes, Paris 1898, pag. 87 ff.

**) Vgl. H. Hertz, Die Prinzipien der Mechanik, 1. Buch, Abschn. 4, Nr. 123—133.

Rad kann in jede seiner ∞^5 möglichen Lagen durch eine Aufeinanderfolge von erlaubten Bewegungen übergeführt werden, während es doch in jedem Moment nicht in jede mögliche unendlich benachbarte Lage durch eine unendlich kleine Bewegung übergeführt werden kann. Analytisch gesprochen: Die Bedingungsgleichungen zwischen den fünf Koordinaten der Lage bilden ein nicht integrables System von Differentialgleichungen.

Die Konstanten des Fahrrades seien die folgenden: M_1 die Masse des Vorderrades, dessen Schwerpunkt S_1 wir ohne wesentlichen Fehler im Mittelpunkt annehmen können. Seine Höhe, also der Radius des Rades, sei h_1 (Fig. 135). Von der Masse der Lenkstange, die wir in M_1 mit einrechnen können, haben wir bei der Schwerpunktsbestimmung abgesehen. M_2 bezeichne die Masse von Hinterrad, Rahmen und Fahrer. Deren Schwerpunkt S_2 habe die Höhe h_2 und den Abstand r von der Vertikalen durch den Berührungspunkt B_2 des Hinterrades.

Es sei ferner: A_v das Trägheitsmoment des Vorderrades um die vertikale Axe durch den Berührungspunkt B_1 , A_h um die Spurlinie, B_v , B_h die entsprechenden Größen des Systems: Hinterrad + Rahmen + Fahrer im Berührungspunkt des Hinterrades, B_{h_v} das Deviationsmoment dieses Systems in der Radebene, ebenfalls im Berührungspunkt gemessen.

Die Lenkstange habe die Neigung σ gegen die Vertikale, ihr Fußpunkt F liege um die Länge c_1 vor dem Berührungspunkt des Vorderrades, um c_2 vor dem Berührungspunkt des Hinterrades, so daß $c_2 - c_1 = l$ der Abstand der beiden Berührungspunkte wird.

Weiter sei ϑ_2 die Neigung der Hinterradebene gegen die Vertikale, wobei eine Neigung nach rechts im Sinne des Fahrers positiv gerechnet wird, ϑ_1 die entsprechende Neigung des Vorderrades, γ der Winkel zwischen Vorder- und Hinterrad, um die Lenkstange gemessen, positiv, wenn von oben gesehen das Vorderrad entgegen dem Uhrzeigersinn gegen das Hinterrad geneigt ist. φ_1 sei der Winkel des Vorderrades gegen die Ebene der mittleren Fahrtrichtung, um die Vertikale im gleichen Sinn gemessen wie γ , φ_2 der entsprechende Winkel beim Hinterrad. Dabei soll es sich nur um sehr kleine Winkel ϑ_1 , ϑ_2 , φ_1 , φ_2 , γ handeln, da nur dann diese Definitionen unmittelbaren Sinn haben. Unter dieser Beschränkung sind die kinematischen Formeln für die Bewegung aufzustellen.*)

Wir denken uns das Vorderrad in zwei Schritten in seine geneigte Lage ϑ_1 gebracht. Es habe zunächst die Neigung des Hinterrades, ϑ_2 ,

*) Für genaue Durchführung der Kinematik des Fahrrads vgl. Whipple und Carvallo l. c.

wie wenn es starr mit diesem verbunden wäre, dazu kommt die Verdrehung um die Axe der Lenkstange, γ . Letztere können wir nun (s. Fig. 135) in zwei Komponenten zerlegen, zunächst eine um die Spurlinie, $-\gamma \sin \sigma$, mit Rücksicht auf den oben definierten Sinn der Drehungen. Diese addiert sich nach den Sätzen über kleine Drehungen zur ersterwähnten Neigung des Vorderrades, so dafs also wird:

$$(1) \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 - \gamma \sin \sigma.$$

Die Vertikalkomponente der Drehung γ liefert dann:

$$(2) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \gamma \cos \sigma.$$

Zu diesen geometrischen Beziehungen für die Lagenkoordinaten tritt noch, den obigen Bemerkungen entsprechend, eine nicht holonome Beziehung für die Bewegungskomponenten. Die mittlere Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung sei u . Wir denken uns die Lage des Rades, sowie die Bewegung u und die Drehung $\frac{d\varphi_1}{dt}$ des Vorderrades um seinen Berührungspunkt gegeben. Die gesuchte Beziehung erhalten wir, wenn wir beachten, dafs durch diese zwei Angaben die Bewegung des Fußpunktes der Lenkstange bestimmt ist, also auch die der Hinterradebene, die ja der Lenkstange folgt. Der Fußpunkt F hat (Fig. 136) in der Spur des Vorderrades die Geschwindigkeit u , senkrecht zu dieser Ebene die Geschwindigkeit $c_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$.

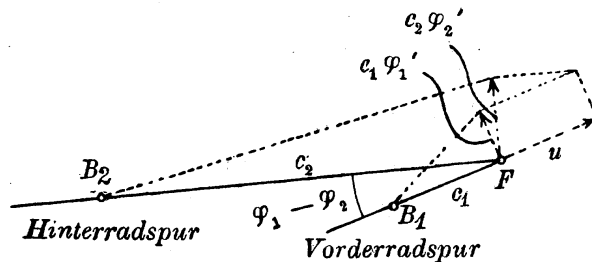


Fig. 136.

Wir bilden die Bewegungskomponente senkrecht zur Spur des Hinterrades, die mit der Spur des Vorderrades den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi$ einschließt. Also wird die gesuchte Komponente:

$$c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

oder, bei Vernachlässigung quadratischer Glieder:

$$c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + u(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In Folge der seitlichen Drehung $\frac{d\varphi_2}{dt}$ des Hinterrades wäre die nämliche Komponente

$$c_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

und es folgt daher:

$$(3) \quad c_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = c_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + u(\varphi_1 - \varphi_2)$$

als die gesuchte nicht holonome Gleichung.

Zunächst, wie wenn das System vollständig starr wäre, eine Kraft

$$(4) \quad Z_2 = M_2 g \frac{l-r}{l}$$

am Berührungspunkt des Hinterrades,

$$(5) \quad Z_1 = M_1 g + M_2 g \frac{r}{l}$$

am Berührungspunkt des Vorderrades. Der Bestandteil $M_2 g \frac{r}{l}$ in Z_1 wird durch den Auflagerdruck des Rahmens auf die Lenkstange übertragen, wir haben daher Gleichgewicht in beiden Teilen des gelenkig verbundenen Systems, wenn wir noch an der Lenkstange, und zwar senkrecht über dem Berührungspunkt des Vorderrads, eine Reaktion zufügen:

$$(6) \quad \begin{aligned} -Z &= -M_2 g \frac{r}{l} \quad \text{am Vorderrad,} \\ +Z &= M_2 g \frac{r}{l} \quad \text{am Rahmen} \end{aligned}$$

angreifend. Die Höhe ihres Angriffspunktes ist $c_1 \operatorname{ctg} \sigma$ nach Fig. 137.

Wir kommen zu den Horizontalreaktionen. Zunächst wirkt eine Reaktion $\pm Y$ an der Lenkstange senkrecht zur Radebene und daher auch senkrecht zu Z , welche von der Übertragung der Seitenbewegung zwischen beiden Teilen des Systems herrührt. Ihre Größe, die jedenfalls von erster Ordnung ist, kann natürlich statisch nicht angegeben werden, sondern hängt vom jeweiligen Bewegungszustand ab. Die nähere Bestimmung ihres Angriffspunktes ist für unsern Zweck unwesentlich.

Schließlich müßten noch die Reaktionen an der Lenkstange in der Fahrtrichtung eingeführt werden, die ja eigentlich den Antrieb vom Hinterrad auf das Vorderrad übertragen. Diese sind aber im Fall der gleichförmigen geradlinigen Fahrt bei Vernachlässigung der rollenden Reibung überhaupt nicht vorhanden, im Fall kleiner Abweichungen nur von zweiter Ordnung; und da ihr Hebelarm um alle in der Vertikalenebene durch den Berührungspunkt hindurchgehenden Axen von erster Ordnung ist, so sind in den später zu benutzenden Momentengleichungen ihre Momente von dritter Ordnung und kommen daher nicht in Betracht.

Ebensowenig ist zu berücksichtigen, daß durch eine Verdrehung des Vorderrades um die Lenkstange sein Berührungspunkt seitlich verschoben wird, wie die geometrische Anschauung zeigt. Denn diese Verschiebung ist von erster Ordnung, und ihr Einfluß auf die zu betrachtenden Momente um den Berührungspunkt von zweiter Ordnung.

Wir müssen hier noch eine kinematische Bemerkung bezüglich der Lage des Schwerpunktes anschließen.*) Es läßt sich leicht geometrisch

*) Vgl. Bourlet, l. c. pag. 91.

zeigen, daß bei unserer Annahme über die Lage der Lenkstange und des Schwerpunkts S_2 , nämlich $c_1 > 0$, $r > 0$, durch eine Verdrehung des Vorderrads bei vertikal stehendem Hinterrad die Höhe des Schwerpunkts S_2 in erster Näherung zwar, aus Symmetriegründen, unverändert bleibt, bei Berechnung der Glieder zweiter Ordnung aber sich verringert, so daß die Lage $\gamma = 0$ ein Maximum der Schwerpunkthöhe bedeutet. Dieses besagt, daß zu dem Schwere-Potential, welches der einfachen seitlichen Neigung entspricht:

$$\text{const} - \frac{g}{2} (M_1 h_1 \vartheta_1^2 + M_2 h_2 \vartheta_2^2),$$

auch Glieder mit dem Faktor $c_1 r g M_2 \gamma^2$ und $c_1 r g M_2 \vartheta \gamma$ hinzutreten. Auf ihre genauere Berechnung können wir hier verzichten, da die ihnen entsprechenden Kraftglieder durch Vermittelung der an der Lenkstange angreifenden Reaktion Z (Gl. 6) in die schließlichen Gleichungen von selbst eingehen werden.

Dagegen kommen, wie bei allen Schwingungen um Gleichgewichtslagen, die kinetischen Glieder, die dieser Senkung entsprechen, in unseren Näherungsgleichungen erster Ordnung nicht vor.

Außer den bisher besprochenen, auch ohne Vorwärtsbewegung vorhandenen Kräften haben wir nun noch die scheinbaren Kräfte der Bewegung, nämlich die Centrifugalkraft und die Kreiselwirkungen, hinzuzufügen. Wir zerlegen die Vorwärtsbewegung in die Translation, mit der Geschwindigkeit u in der mittleren Fahrtrichtung, und die Rotation der Räder in ihren Ebenen, deren Winkelgeschwindigkeit $\frac{u}{h_1}$ ist. Der Impuls dieser Rotation ist für jedes der beiden Räder der nämliche und sei wieder mit N bezeichnet. Am Schwerpunkt S_2 greift dann die Centrifugalkraft

$$M_2 u \frac{d\varphi_2}{dt},$$

am Schwerpunkt S_1 die Centrifugalkraft

$$M_1 u \frac{d\varphi_1}{dt}$$

senkrecht zur Radebene an.

Von der mit der Vorwärtsbewegung verbundenen Rotation rühren die Kreiselwirkungen her, deren Größe und Sinn sich in gleicher Weise bestimmt, wie es im Fall der Eisenbahnwagen näher ausgeführt wurde. Einer Senkung des Rades zunächst, $\frac{d\vartheta}{dt}$, folgt eine Kreiselwirkung um die Vertikale nach:

$$\text{Am Hinterrad:} \quad -N \frac{d\vartheta_2}{dt}.$$

$$\text{Am Vorderrad:} \quad -N \frac{d\vartheta_1}{dt}.$$

Ein Senkung nach rechts etwa hat ein Moment um die Vertikale nach rechts (vom Fahrer gesehen) zur Folge.

Ferner ist die Kreiselwirkung, von der Drehung um die Vertikale $\frac{d\varphi_2}{dt}$, herrührend und um die Spurlinie wirkend, zuzufügen:

$$\text{Am Hinterrad:} \quad + N \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

$$\text{Am Vorderrad:} \quad + N \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Die letzteren beiden Momente sind gleichgerichtet mit dem Moment der Centrifugalkraft, und da N mit u proportional ist, überhaupt nur durch einen konstanten Faktor von diesem verschieden. Da aber zur Centrifugalkraft die Masse des Fahrers und des Rahmens beiträgt, zu den Kreiselwirkungen aber nur die Masse der Räder, so sind in diesem Bestandteil jedenfalls die Kreiselwirkungen sehr unwesentlich neben den Centrifugalwirkungen, ähnlich, wie es sich im Fall der Eisenbahnen ergeben hatte (vgl. pag. 775).

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Impulsgleichungen für die früher besprochenen Grade der Bewegungsfreiheit ansetzen. Für die Stabilitätsfrage, die uns hier interessiert, kommen dabei nur die Gleichungen für die beiden Freiheitsgrade der seitlichen Neigung und der Verdrehung um die Lenkstange in Betracht, während die tatsächlich gleichzeitig vorhandenen kleinen Schwankungen in der Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung auf jene beiden Koordinaten nur einen Einfluß höherer Ordnung haben.

Die Änderung des Impulses um die Spurlinie von Hinter- und Vorderrad ist kinetisch ausgedrückt, d. h. durch Masse und Beschleunigung (A_{h_v} ist Null, wenn wir von der schrägen Lage der Lenkstange absehen, deren Masse an sich klein und daher oben gar nicht erwähnt ist):

$$\text{beim Hinterrad:} \quad B_h \vartheta_2'' - B_{h_v} \varphi_2''.$$

$$\text{beim Vorderrad:} \quad A_h \vartheta_1''$$

Die Summe dieser Glieder ist gleich der Summe der um die Spurlinien wirkenden Momente, nämlich der Kreiselwirkungen um die Spurlinien und der Momente, die von Centrifugalkraft und Schwerkraft (Hebelarm h_1 bzw. h_2), endlich von den Vertikalreaktionen Z herrühren. Diese Summen dürfen wir algebraisch statt vektoriell bilden, da die Berücksichtigung des kleinen Winkels zwischen den beiden Spurlinien nur zu Gliedern zweiter Ordnung Anlaß geben würde. Wir erhalten daher:

$$A_h \vartheta_1'' + B_h \vartheta_2'' - B_{h_v} \varphi_2'' = N(\varphi_1' + \varphi_2') + u(M_1 h_1 \varphi_1' + M_2 h_2 \varphi_2') \\ + M_2 g h_2 \vartheta_2 - Z c_1 \text{ctg } \sigma \cdot \vartheta_2 + M_1 g h_1 \vartheta_1 + Z c_1 \text{ctg } \sigma \cdot \vartheta_1.$$

Diese Gleichung wird durch Einführung der Kraft Z aus (6):

$$(7) \quad \begin{cases} A_h \vartheta_1'' + B_h \vartheta_2'' - B_{hv} \varphi_2'' \\ \quad = N(\varphi_1' + \varphi_2') + u(M_1 h_1 \varphi_1' + M_2 h_2 \varphi_2') \\ \quad + g[M_1 h_1 \vartheta_1 + M_2 h_2 \vartheta_2 + M_2 c_1 \operatorname{ctg} \sigma \frac{r}{l} (\vartheta_1 - \vartheta_2)]. \end{cases}$$

Das letzte Glied der Gleichung (7):

$$g M_2 c_1 \operatorname{ctg} \sigma \frac{r}{l} (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

oder nach der kinematischen Gleichung (1):

$$- g M_2 c_1 \cos \sigma \frac{r}{l} \gamma$$

verschwindet, wenn Vorder- und Hinterradebene zusammenfallen; es entspricht der schon früher bemerkten, durch die Verdrehung des Vorderrades bewirkten Senkung des Schwerpunkts S_2 . Übrigens verschwindet es stets in dem Fall, daß die Lenkstange durch den Berührungspunkt des Vorderrads geht ($c_1 = 0$), da dann, in erster Näherung, das Vorderrad frei um die Lenkstange drehbar ist, ohne Beeinflussung des Hinterrads.

Wir hätten nun noch die Impulsgleichungen z. B. für die vertikalen Axen zu bilden, wollen aber, der Einfachheit halber, statt dessen die Gleichungen für Axen parallel zur Lenkstange aufstellen, die also unter dem Winkel σ gegen die Vertikale geneigt sind. Wir wählen die Axen durch die beiden Berührungspunkte und bilden der größeren Übersichtlichkeit wegen zunächst die Gleichungen für die beiden Teile des Rades getrennt, in welchem Falle wir die Reaktionen an der Lenkstange zu berücksichtigen haben.

Von diesen kommt nur das Moment der Kraft $\pm Y$, die senkrecht zur Radebene angreift, und der vertikalen Kraft $\pm Z$ in Betracht; die Summe ihrer Momente ist für die angegebenen Axen, unabhängig von ihrem Angriffspunkt:

$$\begin{aligned} \text{am Hinterrad:} & \quad (Y + Z \vartheta_2) c_2 \cos \sigma, \\ \text{am Vorderrad:} & \quad -(Y + Z \vartheta_1) c_1 \cos \sigma. \end{aligned}$$

Das Reaktionsmoment an der Lenkstange dagegen kann unberücksichtigt bleiben; denn da die beiden Teile um die Lenkstange frei drehbar sind, so hat dieses jedenfalls keine Komponente um die Lenkstange oder die dazu parallel gewählten Axen.

Für das Vorderrad ist die Impulsänderung in dieser Richtung, nach den Bezeichnungen von pag. 868 wieder aus den kinetischen Elementen berechnet:

$$\cos \sigma A_v \varphi_1'' - \sin \sigma A_h \vartheta_1''.$$

Die Kreiselwirkung um diese Axe setzt sich aus den pag. 872 und 873 angegebenen Kreiselwirkungen zusammen zu

$$- N(\vartheta_1' \cos \sigma + \varphi_1' \sin \sigma).$$

Außerdem sind die Momente der Centrifugalkraft, der Schwerkraft und der Reaktionen Z und Y zu bilden. Der Arm der Centrifugalkraft sei $s_1 = h_1 \sin \sigma$, und entsprechend am Hinterrad: $s_2 = h_2 \sin \sigma + r \cos \sigma$ (vgl. Fig. 137). Wir erhalten so die Impulsleichung:

$$(8) \quad \begin{cases} \cos \sigma A_v \varphi_1'' - \sin \sigma A_h \vartheta_1'' \\ = - N(\vartheta_1' \cos \sigma + \varphi_1' \sin \sigma) - M_1 s_1 u \varphi_1' \\ - g M_1 h_1 \sin \sigma \cdot \vartheta_1 - Z c_1 \cos \sigma \cdot \vartheta_1 - Y c_1 \cos \sigma. \end{cases}$$

Für den Fall $c_1 = 0$, wenn also die Lenkstange durch den Berührungspunkt des Vorderrades hindurchginge, wäre durch diese Gleichung und die Gleichung (7) der Bewegungsvorgang schon vollständig dargestellt. Die Reaktionen Z und Y fielen, da sie an der durch den festen Berührungspunkt des Vorderrads hindurchgehenden Lenkstange angreifend dessen Bewegung um die Lenkstange nicht beeinflussen könnten, heraus. Die seitliche Bewegung des Hinterrads andererseits wäre durch die Bewegung des Berührungspunktes des Vorderrads gegeben. Daher würden die am Hinterrad um die Vertikale wirkenden Kreiselmomente durch die Reaktion an der Lenkstange ganz aufgehoben und kämen für das ganze System nicht in Betracht.

Bei der thatsächlichen Anordnung der Lenkstange aber, $c_1 > 0$, wird die Bewegung des Vorderrads noch durch die des Hinterrads beeinflusst, und zwar wird eine seitliche Drehung des Hinterrads gleichsinnig auf das Vorderrad übertragen, so daß z. B. die Kreiselwirkungen beider Räder sich gegenseitig verstärken.

Es ist also noch eine Gleichung für das Hinterrad zu bilden, die ganz analog zur Gleichung (8) aufgestellt wird. Die Impulsänderung ist hier:

$$\cos \sigma (B_v \varphi_2'' - B_{h_v} \vartheta_2'') - \sin \sigma (-B_{h_v} \varphi_2'' + B_h \vartheta_2'')$$

und die Gleichung wird daher:

$$(9) \quad \begin{cases} (\cos \sigma B_v + \sin \sigma B_{h_v}) \varphi_2'' - (\cos \sigma B_{h_v} + \sin \sigma B_h) \vartheta_2'' \\ = - N(\vartheta_2' \cos \sigma + \varphi_2' \sin \sigma) - M_2 s_2 u \varphi_2' \\ - g M_2 h_2 \sin \sigma \cdot \vartheta_2 + Z c_2 \cos \sigma \cdot \vartheta_2 + Y c_2 \cos \sigma. \end{cases}$$

Aus (8) und (9) haben wir die Reaktion Y zu eliminieren, d. h. die Impulsänderung um die Lenkstange selbst zu bilden. Wir berechnen also:

$$c_2 \cdot (8) + c_1 \cdot (9),$$

$$\text{d. i. } \left\{ \begin{array}{l} c_2 [\cos \sigma A_v \varphi_1'' - \sin \sigma A_h \vartheta_1''] \\ + c_1 [(\cos \sigma B_v + \sin \sigma B_{hv}) \varphi_2'' - (\cos \sigma B_{hv} + \sin \sigma B_h) \vartheta_2''] \\ (10) \left\{ = -N[(c_2 \vartheta_1' + c_1 \vartheta_2') \cos \sigma + (c_2 \varphi_1' + c_1 \varphi_2') \sin \sigma] \right. \\ - c_2 M_1 s_1 \varphi_1' u - c_1 M_2 s_2 \varphi_2' u \\ \left. + g[-\sin \sigma (c_2 M_1 h_1 \vartheta_1 + c_1 M_2 h_2 \vartheta_2) + c_1 \cos \sigma \frac{r}{l} M_2 (c_1 \vartheta_2 - c_2 \vartheta_1)]. \right. \end{array} \right.$$

Da jedenfalls für die Bewegung nicht die absoluten Werte φ_1 , φ_2 , wohl aber ihre Differenz maßgebend ist, so wollen wir aus den kinematischen Gleichungen (2) und (3) in (7) und (10) den Winkel γ zwischen Vorder- und Hinterradebene einführen. Benutzen wir die Abkürzung:

$$\gamma \cos \sigma = \varphi_1 - \varphi_2 = \psi,$$

so haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_2 \varphi_2' - c_1 \varphi_1' &= \psi u \\ \varphi_2' - \varphi_1' &= -\psi', \end{aligned}$$

also, da $c_2 - c_1 = l$:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} l \varphi_1' = \psi u + c_2 \psi' \\ l \varphi_2' = \psi u + c_1 \psi', \end{array} \right.$$

somit:

$$(11 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} l \varphi_1'' = \psi' u + c_2 \psi'' \\ l \varphi_2'' = \psi' u + c_1 \psi''. \end{array} \right.$$

Mittels dieser Substitution werden die Gleichungen (7), (10):

$$\text{I } \left\{ \begin{array}{l} [A_h \vartheta_1'' + B_h \vartheta_2'' - \frac{B_{hv}}{l} (c_1 \psi'' + u \psi')] \\ - \frac{N}{l} [(c_2 + c_1) \psi' + 2u \psi] \\ - \frac{u}{l} [(M_1 h_1 c_2 + M_2 h_2 c_1) \psi' + (M_1 h_1 + M_2 h_2) u \psi] \\ - g[M_1 h_1 \vartheta_1 + M_2 h_2 \vartheta_2 - M_2 c_1 \frac{r}{l} \cdot \psi] = 0, \end{array} \right.$$

bezw.

$$\text{II } \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{c_2^2}{l} A_v \cos \sigma + \frac{c_1^2}{l} (B_v \cos \sigma + B_{hv} \sin \sigma) \right] \psi'' \\ - c_2 \sin \sigma A_h \vartheta_1'' - c_1 (B_{hv} \cos \sigma + B_h \sin \sigma) \vartheta_2'' \\ + \left[\frac{c_2}{l} A_v \cos \sigma + \frac{c_1}{l} (B_v \cos \sigma + B_{hv} \sin \sigma) \right] u \psi' \\ + N \left[(c_2 \vartheta_1' + c_1 \vartheta_2') \cos \sigma + \frac{c_1^2 + c_2^2}{l} \sin \sigma \cdot \psi' \right. \\ \left. + (c_2 + c_1) \frac{u}{l} \sin \sigma \cdot \psi \right] \\ + \left[(c_2^2 M_1 s_1 + c_1^2 M_2 s_2) \frac{u}{l} \psi' + (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2) \frac{u^2}{l} \psi \right] \\ + g \left[c_2 M_1 s_1 \vartheta_1 + c_1 M_2 s_2 \vartheta_2 - c_1 c_2 \frac{r}{l} \sin \sigma M_2 \psi \right] = 0.. \end{array} \right.$$

Die Gl. II, die Impulsgleichung für die Lenkstange als Axe, enthält natürlich im Wesentlichen die Wirkungen, die auf eine relative Verdrehung der beiden Räder gegeneinander hinarbeiten. Zunächst bezeichnet das zweite Glied der dritten Zeile die von Bourlet hervor-gehobenen Wirkungen*), d. h. ein Moment, das einer Verdrehung des Vorderrads um die Lenkstange entgegenwirkt, falls c_1 positiv ist und daher das Vorderrad aufrecht erhält, wenn man sich das Hinterrad aufrecht geführt denkt. Da nämlich die Lenkstange vor dem Berührungspunkt des Vorderrads liegt, so sucht offenbar ein auf das Vorderrad vom Rahmen übertragener Druck, dessen Richtung in der Rahmen-ebene liegt, das Vorderrad um seinen Berührungspunkt zu drehen, und zwar so, daß die beiden Radebenen sich einander nähern.

Die Kreiselwirkungen und Centrifugalwirkungen in der vierten und fünften Zeile enthalten Glieder mit ψ' und ψ . Die letzteren rühren daher, daß nach den kinematischen Bedingungen das Vorhandensein einer Verdrehung ψ eine Krümmung der Bahnkurve des Rades fordert, die ihrerseits wieder von ablenkenden Trägheitswirkungen begleitet sein muß. Wir weisen hier darauf hin, daß die Glieder mit ϑ_1' und ϑ_2' in der vierten Zeile nur von den Kreiselwirkungen herrühren.

Im Falle einer seitlichen Neigung des Rades wird von der Schwere das Vorderrad nach der nämlichen Seite um die Lenkstange gedreht, nach der die erste Neigung erfolgte, da ja der Schwerpunkt vor der schräg gelagerten Lenkstange liegt. Dem entsprechen die beiden ersten Glieder der letzten Zeile. Das letzte Glied dagegen, das den Faktor $-\psi$ enthält, entspricht der schon früher erwähnten Senkung des Schwerpunkts, die durch eine Verdrehung des Vorderrads bewirkt wird, wenn c_1 positiv ist. Die Folge dieses kinematischen Zusammenhangs muß in der That sein, daß eine anfängliche Verdrehung durch die Schwerkraft weiter vergrößert wird.

Die Gleichungen I, II enthalten nur mehr die Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \psi$. Wir fügen die kinematische Gleichung (1) zu als dritte lineare Gleichung zwischen diesen Variablen:

$$\text{III} \quad \vartheta_1 - \vartheta_2 = -\gamma \sin \sigma = -\psi \operatorname{tg} \sigma. \text{**})$$

Um nun die Stabilität des Systems zu untersuchen, haben wir zu setzen:

$$(12) \quad \vartheta_1 = a \cdot e^{\lambda t}; \quad \vartheta_2 = b \cdot e^{\lambda t}; \quad \psi = c \cdot e^{\lambda t}.$$

Wir erhalten dann in bekannter Weise eine algebraische Gleichung für λ , und zwar vom vierten Grade, da 4 die Summe der Ordnungen der Differentialgleichungen I und II ist, während III keine Differentialquotienten enthält. Es existieren also zwei Schwingungen des Systems;

*) Bourlet, l. c. pag. 90. **) Unsere Gleichungen I, II, III sind lineare Kombinationen der von Whipple (pag. 323) wie der von Carvallo (pag. 100) erhaltenen.

sie sind stabil, wenn alle vier Wurzeln komplex mit nicht positivem reellen Teil sind, oder, im Falle von zwei reellen Wurzeln, diese negativ sind. Setzen wir (12) in I, II, III ein, so erhalten wir nach Forthebung des Faktors $e^{\lambda t}$ drei in a, b, c lineare homogene Gleichungen. Die Determinante Δ ihrer Koeffizienten ist 0 zu setzen; dabei ist

$A_h \lambda^2$ $-g M_1 h_1$	$B_h \lambda^2$ $-g M_2 h_2$	$-\frac{B_{hv}}{l} c_1 \lambda^2 - B_{hv} \frac{u}{l} \lambda$ $-\left[\frac{N c_2 + c_1}{l} + \frac{c_2 M_1 h_1 + c_1 M_2 h_2}{l} \right] \lambda$ $-\left[\frac{N^2 u}{l} + \frac{M_1 h_1 + M_2 h_2}{l} \omega^2 \right]$ $+ g M_2 c_1 \frac{r}{l}$
$-c_2 \sin \sigma \cdot A_h \lambda^2$ $+ N c_2 \cos \sigma \cdot \lambda$ $+ g c_2 M_1 s_1$	$-[c_1 \sin \sigma \cdot B_h + c_1 \cos \sigma \cdot B_{hv}] \lambda^2$ $+ N c_1 \cos \sigma \cdot \lambda$ $+ g c_1 M_2 s$	$\left[c_2^2 \cos \sigma \cdot \frac{A_v}{l} + c_1^2 \frac{(\cos \sigma \cdot B_v + \sin \sigma \cdot B_{hv})}{l} \right] \lambda^2$ $\left[c_2 \frac{u}{l} \cos \sigma \cdot A_v + c_1 \frac{u}{l} (\cos \sigma \cdot B_v + \sin \sigma \cdot B_{hv}) \right] \lambda$ $\left[N \frac{c_1^2 + c_2^2}{l} \sin \sigma + \frac{u}{l} (c_2^2 M_1 s_1 + c_1^2 M_2 s_2) \right] \lambda$ $+ N \frac{u}{l} (c_1 + c_2) \sin \sigma + \frac{u^2}{l} (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2)$ $- g c_1 c_2 M_2 \frac{r}{l} \sin \sigma$
1	-1	tg σ .

$\Delta =$

Die Ausrechnung dieser Determinante würde eine Gleichung der folgenden Form ergeben, wenn man noch berücksichtigt, daß N proportional mit u ist, und unter α , β , γ , ε von u unabhängige Konstanten versteht:

$$\alpha\lambda^4 + \beta u\lambda^3 + (\gamma_1 + \gamma_2 u^2)\lambda^2 + (\delta_1 u + \delta_2 u^3)\lambda + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2) = 0.$$

Damit die Stabilitätsbedingung erfüllt ist, die aussagt, daß diese Gleichung keine Wurzeln mit positiv reellem Teil haben darf, müssen, wie leicht zu sehen, alle ihre Koeffizienten positiv sein. Andererseits ist aber durch positive Werte der Koeffizienten die Stabilität noch nicht gesichert, sondern es ist noch weitere Diskriminantenbildung erforderlich.

Wir wollen diese weitläufigen Ausrechnungen hier nicht durchführen, sondern uns vorläufig auf die von Whipple erhaltenen Resultate berufen, die sich auf Abmessungen an einem modernen Fahrrad beziehen.

Für kleines u ist das System durch seine Schwere jedenfalls labil. Hiermit übereinstimmend ergibt sich, daß die Koeffizienten

$$\gamma_1, \delta_1 \text{ negativ sind,}$$

ε_1 dagegen ist positiv, ebenso α und β . Die Koeffizienten der höheren Potenzen von u ,

$$\gamma_2 \text{ und } \delta_2, \text{ sind positiv,}$$

dagegen ist ε_2 negativ, aber absolut genommen klein gegen die übrigen Koeffizienten. Die Koeffizienten von λ und λ^2 werden daher bei wachsender Geschwindigkeit positiv, das absolute Glied dagegen wird schließendlich wieder negativ.

Und zwar wird zunächst der Koeffizient $(\delta_1 u + \delta_2 u^3)$ von λ positiv für eine ungefähre Geschwindigkeit:

$$u_1 = 12 \text{ km/h,}$$

dann auch der Koeffizient $(\gamma_1 + \gamma_2 u^2)$ von λ^2 etwa für die Geschwindigkeit

$$u_2 = 14 \text{ km/h.}$$

Endlich wird der letzte Koeffizient $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2)$ negativ für

$$u_3 = 20 \text{ km/h.}$$

Stabilität ist nur zwischen der Grenze u_2 und u_3 möglich, für welches Gebiet alle Koeffizienten positiv sind. Die nähere Diskussion ergibt hier noch, daß tatsächlich vollständige Stabilisierung in dem Gebiet:

$$u_4 = 16 \text{ km/h bis } u_3 = 20 \text{ km/h}$$

eintritt. Die Rechnungen von Carvallo, die für ein älteres Modell ausgeführt sind, ergeben qualitativ dasselbe, aber für alle diese Grenzen etwas niedrigere Werte.

Wir ergänzen diese Resultate durch den Nachweis, daß die vollständige Stabilisierung ohne Kreiselwirkungen nicht möglich wäre. Zu dem Zweck berechnen wir den Koeffizienten $(\delta_1 u + \delta_2 u^3)$ von λ aus der Determinante Δ . Wenn wir zur Abkürzung das gesamte Schwere-moment $M_1 h_1 + M_2 h_2$ mit Mh bezeichnen, wird dieser:

$$\begin{aligned} & g(-M_1 h_1 c_1 + M_2 h_2 c_2) \sin \sigma \cdot N \\ & - g M h [c_2 \cos \sigma A_o + c_1 (\cos B_o + \sin \sigma B_{ho})] \frac{u}{l} \\ & - g M h (c_1^2 + c_2^2) \sin \sigma \frac{N}{l} \\ & - g M h [c_2^2 M_1 s_1 + c_1^2 M_2 s_2] \frac{u}{l} \\ & + g (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2) \left[(c_1 + c_2) \frac{N}{l} + (M_1 h_1 c_2 + M_2 h_2 c_1) \frac{u}{l} + B_{ho} \frac{u}{l} \right] \\ & + (c_2 + c_1) \cos \sigma \cdot \frac{N}{l} [2Nu + Mhu^2 - gM_2 c_1 r] \end{aligned}$$

und reduziert sich noch zu:

$$\begin{aligned} & - g M h \cos \sigma (c_2 A_o + c_1 B_o) \frac{u}{l} \\ & + g B_{ho} \left(-M_1 h_1 \sin \sigma + M_2 r \frac{c_1}{l} \cos \sigma \right) u \\ & - g M_1 h_1 M_2 h_2 l \sin \sigma \cdot u - g M_1 M_2 h_1 c_1 r \cos \sigma \cdot u \\ & + \frac{c_2 + c_1}{l} \cos \sigma N [2Nu + Mhu^2]. \end{aligned} \tag{13}$$

In diesem Ausdruck enthält das letzte Glied, da N mit u proportional ist, den Faktor u^3 , die anderen nur den Faktor u . Von diesen überwiegen die negativen Glieder weit über das positive, da das letztere die beiden kleinen Faktoren c_1 und r enthält; daher wird für kleine Fahrtgeschwindigkeit u der ganze Koeffizient negativ. Er bleibe immer negativ, und damit die aufrechte Bewegung labil, wenn die Kreiselwirkungen unberücksichtigt blieben, also $N=0$ angenommen würde (d. h. da die Umlaufgeschwindigkeit proportional zu u ist, wenn das Trägheitsmoment der Räder um ihre Rotationsaxe vernachlässigt würde). Durch das letzte, von den Kreiselwirkungen her-rührende Glied, das den Faktor u^3 enthält, wird der Koeffizient bei genügend großer Geschwindigkeit positiv. (Welches die Größenordnung der hier als klein und genügend groß unterschiedenen Geschwindigkeitsintervalle ist, können wir aus den oben angegebenen Whipple'schen Zahlen ersehen. Die Grenze zwischen beiden bildet der Wert $u_1 = 12 \text{ km/h}$.)

Die von Whipple gefundene Stabilität des Fahrrads für die Geschwindigkeiten von 16—20 km/h ist daher nur durch die Kreiselwirkungen der rotierenden Räder ermöglicht.

Die folgenden Bemerkungen sollen noch erklären, wie die Kreiselwirkungen in Thätigkeit treten. Der Faktor N in dem letzten Glied

$$(14) \quad \frac{c_1 + c_2}{l} \cos \sigma N (2Nu + Mhu^2)$$

rührt von der Kreiselwirkung $-N \frac{d\vartheta}{dt}$ um die Vertikalaxen her. Diese Wirkung, die auf eine seitliche Neigung des Rades hin das Vorderrad nach der betreffenden Seite dreht und daher das Rad zwingt, nach dieser Seite auszubiegen, ist also zur Stabilisierung erforderlich. Dagegen tritt in dem Glied

$$2Nu + Mhu^2$$

die Größe $2Nu$, die von der aufrichtenden Kreiselwirkung $N \frac{d\varphi}{dt}$ herrührt, nur zu dem viel größeren gleichgerichteten Moment der Centrifugalkraft des ganzen Systems, Mhu^2 , hinzu und ist daher unwesentlich.

Die stabilisierende Wirkung der Rotation beruht also darauf, daß das Rad, wenn es sich seitlich geneigt hat, durch die Kreiselwirkung wesentlich des Vorderrades gezwungen wird, auszubiegen, und dadurch die Centrifugalkraft in Thätigkeit tritt, die das Rad wieder aufrichtet. Die eigentlich stabilisierende Kraft, die die Schwerkraft überwindet, ist die Centrifugalkraft, der Kreiselwirkung fällt die Rolle der Auslösung zu. Die Stabilisierungsfähigkeit nimmt übrigens wegen des Faktors $\cos \sigma$ in (14) ab mit zunehmender Schrägstellung der Lenkstange gegen die Vertikale.

Allerdings wirkt auch die am Vorderrad angreifende Schwere, zusammen mit der vom Hinterrad auf das Vorderrad übertragenen Reaktion Z dahin, daß das Vorderrad beim seitlichen Überneigen des Systems nach dieser Seite hin ausbiegt und ruft daher eine Centrifugalkraft wach. Trotzdem ist diese Wirkung nach dem Vorhergehenden nicht im Stande, das System vollständig zu stabilisieren. Es ist eben die Kreiselwirkung die einzige mit $\frac{d\vartheta}{dt}$ proportionale Kraft, während die Schwerkraft mit ϑ selbst proportional ist und daher das durch die erstere veranlafte Ausbiegen rascher der seitlichen Neigung folgt als die Schwerkraft. Die erste Wirkung ist in der That nur um eine Viertelschwingungsdauer gegen die Senkung verschoben, die andere aber um eine halbe Schwingung.

Um auch die Gründe für das schließliche Labilwerden zu verstehen, betrachten wir endlich noch das von λ freie Glied $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2$ in der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$. Dieses Glied enthält, wie aus der Determinante Δ leicht ersichtlich, Terme mit dem Faktor g^2 , die u nicht enthalten. Die Summe dieser Terme wird positiv, nämlich:

$$(15) \quad g^2 M_1 M_2 h_1 \sin \sigma (\operatorname{tg} \sigma h_2 l - c_1 r) + g^2 M_2^2 c_1 r \left(h_2 \sin \sigma - \frac{c_1 r}{l} \right).$$

Hier sind die beiden negativen Glieder wegen der Faktoren $c_1 r$, bzw. $c_1^2 r^2$, wesentlich kleiner als die positiven. Außerdem treten noch Terme mit dem Faktor u^2 auf:

$$-g M h \left(\frac{c_2 + c_1}{l} N u \sin \sigma + (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2) \frac{u^2}{l} \right) \\ + g (c_2 M_1 s_1 + c_1 M_2 s_2) \left[N \frac{2u}{l} + M h \frac{u^2}{l} \right]$$

oder

$$(16) \quad g N u \left[(M_1 h_1 - M_2 h_2) \sin \sigma + \frac{2c_1}{l} M_2 r \cos \sigma \right].$$

Hier überwiegt das negative, das Gewicht des Fahrers enthaltende Glied $-g N u M_2 h_2 \sin \sigma$, während das letzte Glied wegen der kleinen Faktoren c_1 und r unbedeutend ist. Überdies überwiegen die Terme (16) bei großem u über die Terme (15); daher wird der ganze Koeffizient für große Geschwindigkeiten negativ, die Bewegung also labil.

Gehen wir nun dem eigentlichen Ursprung der Terme (16) nach; sie entsprechen den Gliedern mit dem Faktor $u^2 \psi$ in der Differentialgleichung II und waren durch die Einführung der kinematischen Gleichungen

$$(2) \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

$$(3) \quad c_2 \varphi_2' = c_1 \varphi_1' + u \psi$$

in (10) entstanden.

Diese drücken aber die anschauliche Thatsache aus, daß im Fall einer relativen Verdrehung der beiden Radebenen gegeneinander, abgesehen von äußeren Kräften, die Hinterradebene der Vorderradebene während der Fahrt sich beständig nähert, da sie immer durch eine in dieser festgelegte Axe hindurchgeht. Denkt man sich das Vorderrad geführt, so strebt die Spurlinie des Hinterrades asymptotisch in die des Vorderrades (man kann sie also als Traktrix bezeichnen). Bei großer Geschwindigkeit erfolgt diese Annäherung sehr rasch, so daß für $u = \infty$ aus der kinematischen Gleichung (3) im Allgemeinen zu folgern ist, falls nicht auch beide Schwingungen des Vorderrades sehr rasch erfolgen:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0.$$

Dann verhält das Rad sich aber so, als ob beide Teile starr verbunden wären.

Die Stabilierung durch die Kreiselwirkungen beruhte aber eben auf der relativen Beweglichkeit der beiden Räder. Sobald diese starr verbunden sind, können wir das ganze System mit einem einfachen Kreisel vergleichen, der aber nicht mehr drei, sondern wegen der doppelten Berührung mit dem Erdboden nur noch zwei Freiheitsgrade

hat, und können auf diesen Kreisel das allgemeine in § 1 ausgesprochene Prinzip anwenden, nach dem bei Unterbindung eines der Freiheitsgrade jede Möglichkeit der Stabilierung durch Kreiselwirkungen aufhört. Daraus erklärt sich die anfangs paradox aussehende Erscheinung, daß gerade bei großen Geschwindigkeiten die Stabilierungsfähigkeit der Rotation beim Fahrrad versagt, während beim freien Kreisel große Rotationsgeschwindigkeiten der Stabilierung günstig sind. Dieser labilen Bewegung werden sich bei großer Geschwindigkeit noch stabile Schwingungen überlagern, die man mit den Nutationen beim freien Kreisel vergleichen kann. Wegen ihrer kurzen Periode läßt sich unsere vorhergehende Schlußweise auf sie nicht anwenden.

Übrigens ist noch zu erwähnen, daß bei nahezu vertikal stehender Lenkstange auch bei beliebig großer Geschwindigkeit die Bewegung stabil bleibe, da für sehr kleine Werte von σ auch der letzte Koeffizient der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ positiv bleibt. In dem Falle sind beide Eigenschwingungen rasch genug, um trotz der scheinbar starren Koppelung zwischen Vorder- und Hinterrad die Stabilität zu erhalten. Je mehr aber die Lenkstange geneigt wird, desto mehr nimmt die Stabilierungsfähigkeit der Kreiselwirkungen ab, entsprechend dem allgemeinen Verhalten, wenn die beiden nicht zyklischen Freiheitsgrade, hier Drehung um die Spurlinie und um die Lenkstange, sich einander nähern.

Wir wollen die erhaltenen Resultate noch kurz mit der Erfahrung vergleichen. Da ist zunächst noch einmal zu betonen, daß die Annahme des mit dem Rad starr verbundenen Fahrers, die der ganzen Diskussion zu Grunde lag, praktisch nicht zu realisieren ist, da der Fahrer immer durch unwillkürliche, fast unmerklich kleine Bewegungen die Stabilität des Rades beeinflussen kann. Die Hülfen, die er hier geben kann, sind zweierlei Art. Erstens kann er das Vorderrad im geeigneten Zeitpunkt ein wenig um die Lenkstange drehen und dadurch centrifugal beeinflussen. Die erforderlichen Ausdrehungen sind, wie die durch die Kreiselwirkungen selbstthätig bewirkten, sehr gering. Ferner kann der Fahrer durch seitliches Neigen des Körpers ein entgegengesetztes Schweremoment erzeugen, das das fallende Rad wieder aufrichtet. Bei freihändigem Fahren verzichtet der Radler auf die erste Wirkung und hat nur noch die Schwere zur Verfügung.

Durch die Erfahrung ist das Bestehen einer unteren Geschwindigkeitsgrenze bestätigt, unter der das freihändige Fahren unmöglich wird, offenbar deshalb, weil bei dem annähernden Wegfall der Eigenstabilierung des Fahrrades die Hülfen, die das seitliche Neigen des Körpers leisten kann, nicht ausreichen. Dagegen ist eine obere Grenze praktisch nicht merkbar. Es liegt dies wohl daran, daß, entsprechend

näherer Zahlenrechnung von Whipple, die Labilität des Fahrrads bei nicht zu großen Geschwindigkeiten, solchen, die thatsächlich überhaupt möglich sind, noch sehr gering ist, so daß schon unmerkbar schwache Neigungen des Körpers ausreichen, um die Stabilität zu erhalten.

Wenn nach dem Vorhergehenden auch die Eigenstabilisierung des Fahrrades, eben wegen der leichten Hülfen, die der geschulte Fahrer geben kann, nicht gerade als erforderlich nachgewiesen ist, und deshalb auch bei der technischen Konstruktion die Frage nach der möglichsten Energieersparnis vor der nach der Stabilität steht, so ist es doch kaum von der Hand zu weisen, daß die Kreiselwirkungen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts bei der Fahrt beitragen, wir möchten sagen, in besonders intelligenter Weise beitragen; sind sie es doch, die vermöge der Phase ihrer Wirkung zuerst ein Überfallen des Rades spüren und die dann die viel stärkeren, aber etwas langsamen Centrifugalwirkungen in den Dienst der Stabilität spannen.

§ 9. Über vermeintliche und wirkliche Kreiselwirkungen bei der Laval-Turbine.

Die geniale Konstruktion des schwedischen Ingenieurs de Laval hat die Technik mit Dampfturbinen von außergewöhnlicher Geschwindigkeit und besonders gutem Wirkungsgrade versehen. Der Schwerpunkt der Konstruktion liegt natürlich auf thermodynamischem und hydrodynamischem Gebiet, in der direkten Verwendung des rapide ausströmenden Wasserdampfes zum Antrieb und in der sinnreichen Formgebung der Laval'schen Düsen. Diese in den Turbinenbau eingeführten neuen Gedanken sind nicht nur für die technische Praxis, sondern auch für die technische Wissenschaft folgenreich gewesen, so daß die Erforschung der Strömungs- und Druckverhältnisse in einer Lavaldüse jetzt ein wichtiges Spezialgebiet der technischen Thermodynamik*) ausmacht.

Was uns hier interessiert, ist indessen ein rein dynamisches Problem, welches de Laval zugleich gelöst hat. Den hohen Umdrehungszahlen der Lavalturbine (20000 bis 30000 Touren in der Minute bei kleineren Ausführungen) würde kein Lager und keine Welle gewachsen sein; jede Excentrizität des Lagers und jede Verbiegung der Welle würde vermöge der ungeheuren Centrifugalkräfte zu einer Zerstörung der ganzen Konstruktion führen. Das Mittel, das Laval hiergegen gefunden hat, ist sehr merkwürdig: er machte die Welle biegsam

*) Vgl. den Bericht von K. Prandtl in der Encyclopädie der mathem. Wiss., Bd. V, Art. 4.