

## ОБ УПРАВЛЯЕМОМ И ПРОГРАММНОМ ДВИЖЕНИЯХ БИЦИКЛА ПО ПЛОСКОСТИ

Л. Г. ЛОБАС

(Киев)

Известно, что бицикл является основным кинематическим элементом одноколейных транспортных машин (самолета с велосипедным шасси, мотоцикла, велосипеда и пр.). Он состоит из рамы и двух последовательно соединенных колес, курсовым углом одного из которых можно управлять вследствие свободы вращения вокруг рулевой оси. Классические результаты по кинематике и динамике бицикла развиты и обобщены в [1]. Из работ последнего времени отметим [2-5]. Во всех этих работах исследовалось равномерное движение линейной модели.

В данной статье в предположении реализации классических неголономных связей качения диска для модели общей конструкции при малых наклонах к вертикали и небольших поворотах руля ставится задача исследования движения с ускорением по траектории переменной достаточно малой кривизны. Рассмотрены варианты программного и управляемого движений: исследовано программное качение бицикла на этапах вход в кривую — движение по окружности, изучена реакция машины на поворот руля при различных сочетаниях параметров движения. Оценивается влияние замедления при движении по криволинейной траектории возрастающей кривизны и указаны величины, практически не зависящие от него.

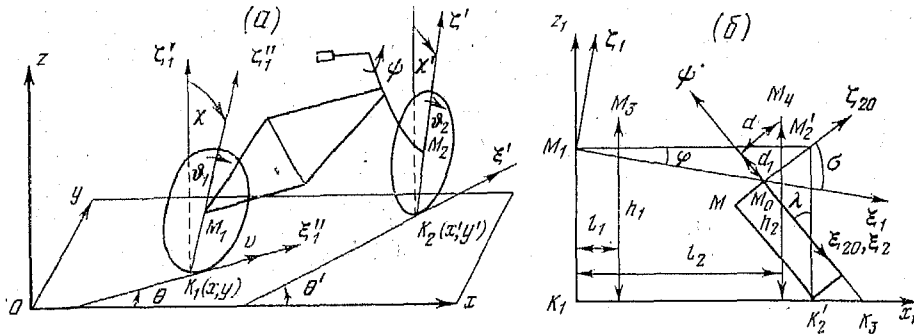
1. Следуя [1], конфигурацию бицикла (фиг. 1, а) опишем координатами  $x, y, \theta, \chi, \psi, \theta_1, \theta_2$ . Уравнения неголономных связей суть ( $R=K_1M_1=K_2M_2=K_2'M_2'$  — радиус диска)

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta - R\dot{\theta}_1 = 0, \quad -x' \sin \theta + y' \cos \theta = 0 \quad (1.1)$$

$$x'' \cos \theta' + y'' \sin \theta' - R\dot{\theta}_2 = 0, \quad -x'' \sin \theta' + y'' \cos \theta' = 0 \quad (1.2)$$

Введением квазискоростей  $v = x' \cos \theta + y' \sin \theta, U = -x' \sin \theta + y' \cos \theta$  уравнения (1.1) представляются в виде  $v = R\dot{\theta}_1, U = 0$ .

Пусть  $x_1, y_1, z_1$  — координаты центра  $M_1$  заднего колеса относительно неподвижной системы  $Oxyz$ . Тогда  $x_1 = x + R \sin \theta \sin \chi, y_1 = y - R \cos \theta \sin \chi, z_1 = R \cos \chi$ . Повернув оси  $x, y$  на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ , получим систему координат  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ . Последняя в результате поворота на угол  $\chi$  вокруг оси  $\xi_1$  дает ориентацию системы  $K_1\xi_1'', \eta_1'', \zeta_1''$ .



Фиг. 1

Пусть  $M_0$  — точка пересечения рулевой оси с перпендикуляром, опущенным на эту ось из центра  $M_2$  переднего колеса (фиг. 1, б). Обозначим через  $\varphi$  угол, который прямая  $M_1M_0$  образует с горизонталью; направление от точки  $M_1$  к точке  $M_0$  примем за положительное направление оси  $M_1\xi_1$ ;  $M_1\eta_1'' \parallel M_1\eta_1$ ;  $M_1\xi_1\zeta_1$  — плоскость рамы. Введем систему  $M_0\xi_{20}\eta_{20}\zeta_{20}$  так, что  $M_0\eta_{20} \parallel M_1\eta_1$ ,  $(\xi_{20}, \xi_1) = \pi/2 - \sigma$ ,  $(\xi_1, \zeta_{20}) = \sigma$ . В результате поворота осей  $M_0\eta_{20}, M_0\xi_{20}$  вокруг оси  $M_0\xi_{20}$  на угол  $-\psi$  получаем систему  $M_0\xi_2\eta_2\zeta_2$ . На фиг. 1, б через  $M_2', K_2'$  обозначены положения точек  $M_2, K_2$  при  $\psi=0$ . Примем

$$\lambda = \sigma - \varphi, \quad M_1M_0 = a, \quad M_0M_2 = b, \quad MM_0 = c_1, \quad K_2'K_3 = \tau, \quad K_1K_2' = c$$

$$R_0 = R - a \sin \varphi + b \cos \psi \sin \lambda, \quad c_0 = a \cos \varphi + b \cos \psi \cos \lambda$$

Тогда

$$x_2 = x + (R_0 \sin \chi - b \sin \psi \cos \chi) \sin \theta + c_0 \cos \theta$$

$$y_2 = y - (R_0 \sin \chi - b \sin \psi \cos \chi) \cos \theta + c_0 \sin \theta, \quad z_2 = R_0 \cos \chi + b \sin \psi \sin \chi$$

где  $x_2, y_2, z_2$  — координаты точки  $M_2$  в системе  $Oxyz$ . Справедливы геометрические соотношения [1]:

$$a \sin \varphi = b \sin \lambda, \quad c = a \cos \varphi + b \cos \lambda, \quad c_1 = R \sin \lambda - b$$

Далее находим

$$x' = x - R \sin \theta' \sin \chi' + (R_0 \sin \chi - b \sin \psi \cos \chi) \sin \theta + c_0 \cos \theta$$

$$y' = y + R \cos \theta' \sin \chi' - (R_0 \sin \chi - b \sin \psi \cos \chi) \sin \theta + c_0 \sin \theta$$

$$R \cos \chi' = R_0 \cos \chi + b \sin \psi \sin \chi$$

$$\sin \theta' \cos \chi' = (\cos \psi \cos \chi + \sin \psi \sin \chi \sin \lambda) \sin \theta + \sin \psi \cos \lambda \cos \theta$$

$$\cos \theta' \cos \chi' = (\cos \psi \cos \chi + \sin \psi \sin \chi \sin \lambda) \cos \theta - \sin \psi \cos \lambda \sin \theta$$

$$\sin \chi' = \sin \chi \cos \psi - \sin \psi \cos \chi \sin \lambda, \quad \chi' = \chi - \psi \sin \lambda + \dots$$

$$\theta' = \theta + \psi' \cos \lambda + \dots$$

Уравнения (1.2) принимают вид

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta - R \theta_2' + (c_1 + c \cos \lambda) \theta' \psi + \dots = 0$$

$$(x' \cos \theta + y' \sin \theta) \psi \cos \lambda + c_1 \psi' - c \theta' + \dots = 0 \quad (1.3)$$

В качестве квазискоростей  $\omega_1, \dots, \omega_4$  примем левые части уравнений (1.1), (1.3);  $\omega_5 = v, \omega_6 = \psi', \omega_7 = \chi'$ . Обратные зависимости суть

$$x' = -\omega_2 \sin \theta + \omega_5 \cos \theta, \quad y' = \omega_2 \cos \theta + \omega_5 \sin \theta, \quad \theta' = (-\omega_4 + \omega_5 \psi \cos \lambda + c_1 \omega_6) c^{-1} + \dots$$

$$\theta_1' = (-\omega_1 + \omega_5) R^{-1}, \quad \theta_2' = R^{-1} \{ -\omega_3 - \omega_4 \psi (\cos \lambda + c_1/c) + \omega_5 [1 + (1/2 \cos^2 \lambda + c_1 c^{-1} \cos \lambda - c_1/2R^{-1} \sin \lambda) \psi^2 + c_1 R^{-1} \psi \chi'] + \omega_6 [(c_1^2 c^{-1} + c_1 \cos \lambda + R \sin \lambda \cos \lambda) \psi - \chi R \cos \lambda] - \omega_7 \psi R \cos \lambda \} + \dots$$

Здесь и выше многочлином обозначены члены, не участвующие в формировании линеаризованных (относительно  $\psi, \chi$  и их производных по времени) уравнений движения. Динамические уравнения составим методом Больцмана — Хамеля [6, 7]. Отбрасывая нелинейные члены, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} = P_5, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi} +$$

$$+ v \left[ \frac{c_1}{c} \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + c_1 \left( \frac{\sin \lambda}{R} - \frac{\cos \lambda}{c} \right) \psi \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \frac{\partial T}{\partial \omega_4} \cos \lambda \right] = P_6$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \chi'} - \frac{\partial T}{\partial \chi} - \frac{c_1}{R} v \psi \frac{\partial T}{\partial \omega_3} = P_7$$

После вычислений находим

$$M v' = P_5, \quad a_0 \chi'' - a_1 \chi' - a_2 \psi'' - a_3 v \psi' + (a_4 - a_5 v^2 + a_6 v) \psi = 0$$

$$b_0 \psi'' + (b_1 v + \delta) \psi' + (b_2 v^2 - b_3 + b_4 v) \psi - a_2 \chi'' + b_5 v \chi' + (a_4 + b_6 v + b_7 v^2) \chi = 0 \quad (1.4)$$

где  $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + (I_1 + I_2) R^{-2}$ ;  $P_5$  — линеаризованная обобщенная сила, отнесенная к квазиординате  $v$  и включающая вращающий момент двигателя, действующий на ведущее колесо, силы трения в осях колес, сопротивления воздуха, трения качения

$$a_0 = J_4, \quad a_1 = g v_1, \quad a_2 = J_3 + c_1 / c J_{12}, \quad a_3 = v \cos \lambda + c_1 \mu_2, \quad a_4 = g \mu_1$$

$$a_5 = \mu_2 \cos \lambda, \quad a_6 = -v \cos \lambda, \quad b_0 = J + c_1^2 c^{-2} J_2 + 2 c_1 c^{-1} J_4$$

$$b_1 = (c_1 c^{-1} J_2 + J_4) c^{-1} \cos \lambda + c_1^2 c^{-2} v_3 + c_1 c^{-1} \mu_3 + m_2 (b + c_1) \cos \lambda, \quad b_2 = (\mu_4 + c_1 c^{-1} v_3) c^{-1} \cos \lambda$$

$$b_3 = g \mu_1 \sin \lambda, \quad b_4 = (c_1 c^{-1} J_2 + J_4) c^{-1} \cos \lambda +$$

$$+ c_1 [(m_2 + I_2 R^{-2}) \cos \lambda + c_1 c^{-1} I_2 R^{-2}] - c_1 c^{-1} \mu_5 - m_4 d \cos \lambda$$

$$b_5 = v_2, \quad b_6 = c_1 \mu_2, \quad b_7 = I_2 R^{-3} c_1, \quad v = m_2 R + I_2 R^{-1} + J_{12} c^{-1}$$

$$v_1 = (m_1 + m_2) R + m_3 h_1 + m_4 h_2, \quad v_2 = I_2 R^{-1} (c_1 c^{-1} + \cos \lambda) + c_1 c^{-1} I_1 R^{-1}$$

$$v_3 = m_3 l_1 + m_4 l_2, \quad \mu = m_2 + m_4 + I_2 R^{-2}, \quad \mu_1 = m_2 b + m_4 d$$

$$\mu_2 = [(I_1 + I_2) R^{-1} + v_1] c^{-1}, \quad \mu_3 = \mu_1 + m_2 c_1, \quad \mu_4 = \mu_3 + I_2 R^{-1} \sin \lambda, \quad \mu_5 = \mu_1 + I_2 R^{-1} \sin \lambda$$

$$J = A_2 \sin^2 \lambda + B_2 \cos^2 \lambda + D_2 \sin 2\lambda + I_2' + m_4 d^2 + m_2 (b + c_1)^2$$

$$J_1 = A_1 + A_2 + I_1' + I_2' + (m_1 + m_2) R^2 + m_3 h_1^2 + m_4 h_2^2, \quad J_2 = B_1 + B_2 + I_1' + I_2' + m_3 l_1^2 + m_4 l_2^2$$

$$J_3 = (A_2 + I_2') \sin \lambda + D_2 \cos \lambda + m_2 R (b + c_1) + m_4 h_2 d, \quad J_4 = (B_2 + I_2') \cos \lambda + D_2 \sin \lambda + m_4 l_2 d$$

$$J_{12} = D_1 + D_2 + m_3 h_1 l_1 + m_4 h_2 l_2, \quad h_2 = R - a \sin \varphi + d_1 \cos \lambda + d \sin \lambda, \quad l_2 = a \cos \varphi - d_1 \sin \lambda + d \cos \lambda$$

Здесь  $m_1, I_1, I_1'$  — масса, осевой и диаметральный моменты инерции заднего колеса;  $m_2, I_2, I_2'$  — то же для переднего колеса;  $m_3, M_3$  — масса и центр масс рамы;  $A_1, B_1, D_1$  — моменты инерции и центробежный момент инерции рамы относительно осей  $M_3\xi_1, M_3\zeta_1$ ;  $m_4, M_4$  — масса и центр масс рулевой вилки с принадлежащими ей элементами;  $A_2, B_2, D_2$  — моменты инерции и центробежный момент инерции рулевой вилки относительно осей  $M_4x_2, M_4z_2$ , где  $(\xi_2, x_2) = \pi/2 - \lambda$ ,  $(x_2, \zeta_2) = \lambda$ ;  $\delta$  — коэффициент вязкого трения в рулевой оси.

Пусть  $k_1, R_1, s_1$  — кривизна, радиус кривизны и длина дуги траектории точки  $K_1$ ;  $k_2, R_2, s_2$  — аналогичные величины для траектории точки  $K_2$ , т. е.  $k_1 = d\theta/ds_1 = R_1^{-1}$ ,  $k_2 = d\theta'/ds_2 = R_2^{-1}$ . Тогда  $\theta' = k_1 v$ ,  $\theta'' = k_2 v'$ . Имеем также

$$v = R\theta_1', \quad v' = R\theta_2', \quad dx = ds_1 \cos \theta, \quad dy = ds_1 \sin \theta, \quad dx' = ds_2 \cos \theta'$$

$$dy' = ds_2 \sin \theta', \quad ds_1 = v dt, \quad ds_2 = v' dt$$

В линейном приближении

$$\theta'' = c_1 c^{-1} \psi'' + c^{-1} v \psi \cos \lambda, \quad dx = dx' = ds_1 = ds_2, \quad v = v', \quad k_1 = c^{-1} \psi \cos \lambda + c_1 c^{-1} v^{-1} \psi'$$

$$k_2 = k_1 + v^{-1} \psi' \cos \lambda, \quad x' = x + c, \quad y' = y + c\theta - c_1 \psi, \quad \theta' = \theta + \psi \cos \lambda, \quad dy = \theta ds_1, \quad dy' = \theta' ds_2$$

*Замечание.* Обозначим через  $l_0, h_0$  координаты центра масс  $P$  бицикла в системе  $K_1 x_1 z_1$ . Если  $\lambda = 0$ ,  $b = 0$ ,  $D_2 = 0$ ,  $d = 0$  и вся масса бицикла сосредоточена в точке  $P$  (простейшая модель), то из первого уравнения (1.4) получаем уравнение

$$c h_0 \chi'' = c g \chi + v l_0 \psi' + (v^2 + v' l_0) \psi$$

соответствующее элементарной теории и обобщающее известное уравнение [1, 8] на случай  $v = v(t)$ .

2. Рассмотрим движение бицикла, представляющее собой вираж без ускорения ( $v = \text{const}$ ) с постоянным креном ( $\chi = \text{const}$ ) при закреплённом руле ( $\psi = \text{const}$ ). В этом случае

$$\theta = \theta_0 + v c^{-1} \psi t \cos \lambda, \quad \chi = (a_4 - a_5 v^2) a_1^{-1} \psi$$

Точка  $K_1$  движется по окружности  $x^2 + y^2 = c^2 \psi^{-2} \cos^{-2} \lambda$ . Ниже приведены значения радиуса  $R_1 = c \psi^{-1} \cos^{-1} \lambda$  (м) окружности при различных углах  $\psi$  (рад) для  $c = 1.4$  м,  $\lambda = 0.4363$  рад.

$\psi$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.11	0.15	0.20	0.23	0.26
$R_1$	155	77.2	51.5	38.6	30.9	25.8	19.3	14.0	10.3	7.72	6.72	5.94

На фиг. 2 показано однопараметрическое семейство прямых  $\chi_1 = \chi_1(\psi)$ ,  $\chi_1 = -\chi$  с параметром  $v$ , дискретные значения которого от 2 м/сек до 100 м/сек указаны возле соответствующих прямых. Масштаб горизонтальной оси в каждом из четырех квадрантов разный: точки 0, 2, 4, ... соответствуют первому квадранту; точки 0, 0.01, 0.02 соответствуют четвертому квадранту; второй и третий квадранты характеризуются соответственно точками 0, 0.2, 0.4, ... и 0, 0.02, 0.04, ... Область применимости линейной теории налагает существенные ограничения на угол  $\psi$ : чем больше  $v$ , тем меньше  $\psi$ .

Использованы следующие числовые данные:

$$m_1 = m_2 = 14.7 \text{ кг}, \quad m_3 = 127.5 \text{ кг}, \quad m_4 = 9.81 \text{ кг}, \quad g = 9.81 \text{ мсек}^{-2}, \quad R = 0.3 \text{ м}$$

$$b = 0.0724 \text{ м}, \quad c_1 = 0.05438 \text{ м}, \quad l_1 = 0.63 \text{ м}, \quad h_1 = 0.57 \text{ м}, \quad d_1 = 0.45 \text{ м}, \quad d = 0.03 \text{ м}$$

$$\varphi = 0.023 \text{ рад}$$

$$I_1' = I_2' = 0.33 \text{ кгм}^2, \quad I_1 = I_2 = 0.667 \text{ кгм}^2, \quad B_1 = 6.867 \text{ кгм}^2, \quad A_1 = 11.77 \text{ кгм}^2, \quad D_1 = 0.196 \text{ кгм}^2$$

$$D_2 = 0.98 \cdot 10^{-4} \text{ кгм}^2, \quad B_2 = 0.0078 \text{ кгм}^2, \quad A_2 = 0.0098 \text{ кгм}^2$$

Для простейшей модели бицикла

$$\chi = -\mu_2 g^{-1} v_1^{-1} v^2 \psi = -\mu_2 c g^{-1} v_1^{-1} R_1^{-1} v^2 = -[v_1 + (I_1 + I_2) R^{-1}] v_1^{-1} g^{-1} R_1^{-1} v^2$$

В элементарной теории инерцией колес пренебрегают. С погрешностью  $\approx 5\%$  имеем  $v_1 + (I_1 + I_2) R^{-1} \approx v_1$ . Тогда  $\chi_1 \approx v^2 g^{-1} R_1^{-1}$ . Последняя формула приведена в [9].

3. В случае равнозамедленного ( $v=v_0-wt$ ,  $w=\text{const}>0$ ) управляемого движения бицикла при равномерном повороте руля ( $\psi=\beta t$ ,  $\beta=\text{const}$ ):

$$\theta = \frac{\beta}{c} \left[ c_1 + \left( \frac{v_0}{2} t - \frac{w}{3} t^2 \right) \cos \lambda \right] t, \quad k_1 = \frac{\beta [c_1 + (v_0 t - w t^2) \cos \lambda]}{c(v_0 - w t)}$$

$$x = s_1 = v_0 t - \frac{w}{2} t^2 \quad y = \frac{\beta}{c} \left[ \frac{1}{2} v_0 c_1 t^2 + \left( \frac{1}{2} v_0^2 \cos \lambda - c_1 w \right) \frac{t^3}{3} - \right. \\ \left. - \frac{5}{24} v_0 w t^4 \cos \lambda + \frac{w^2}{15} t^5 \cos \lambda \right]$$

Угол  $\chi$  крена определяется вторым уравнением (1.4)

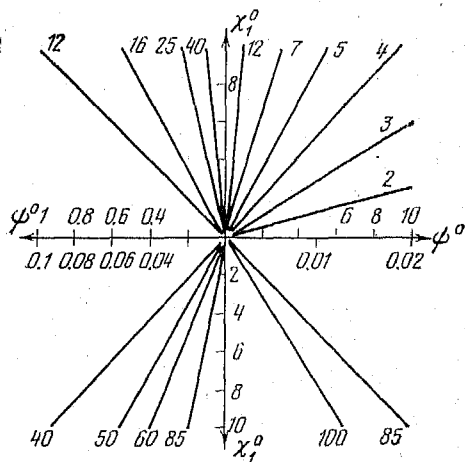
$$\chi'' - r^2 \chi = a_{31} \beta v_0 + [(a_{61} - a_{31}) w + a_{51} v_0^2 - a_{41}] \beta t - 2 a_{51} \beta v_0 w t^2 + a_{51} \beta w^2 t^3$$

$$r^2 = a_1/a_0, \quad a_{31} = a_3/a_0, \quad a_{41} = a_4/a_0, \quad a_{51} = a_5/a_0$$

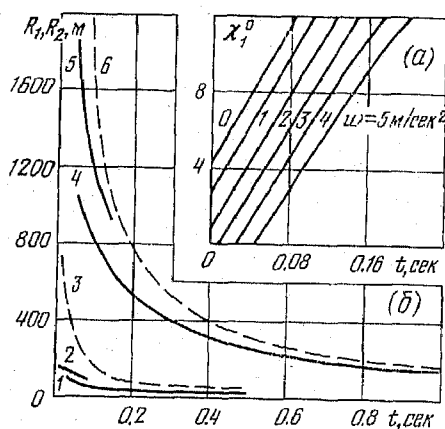
Частное решение последнего уравнения, соответствующее рассматриваемому вынужденному режиму, имеет вид

$$\chi = \beta r^{-2} \{ v_0 (4 a_{51} r^{-2} w - a_{31}) + [a_{41} - a_{51} v_0^2 + (a_{31} - a_{61}) w - 6 a_{51} r^{-2} w^2] t + 2 a_{51} v_0 w t^2 - a_{51} w^2 t^3 \} \quad (3.1)$$

На фиг. 3, а показана зависимость  $\chi_1 = \chi_1(t)$ ,  $\chi_1 = -\chi$  для  $\beta = 0.1$  рад/сек,  $v_0 = 15$  м/сек. Эта зависимость почти линейна, лишь при больших значениях  $w$  график функции  $\chi_1(t)$  незначительно искривляется в сторону выпуклости. На остальные



Фиг. 2



Фиг. 3

характеристики бицикла влияние замедления практически неощутимо. Отметим следующую особенность. В начале движения  $\theta < \psi$ . При  $w \ll 4$  м/сек<sup>2</sup> и малых значениях  $t$ , не выходящих за рамки применимости линейной модели, угол  $\theta$  так и остается меньшим угла  $\psi$ . При  $w = 5$  м/сек<sup>2</sup>, начиная с  $t = 0.21$  сек, бицикл в своем повороте опережает переднее колесо ( $\theta > \psi$ ): для  $t = 0.21$  сек  $\theta = 1.22^\circ$ ,  $\psi = 1.20^\circ$ ,  $\chi_1 = 12.5^\circ$ ; для  $t = 0.22$  сек  $\theta = 1.33^\circ$ ,  $\psi = 1.26^\circ$ ,  $\chi_1 = 13.1^\circ$ . Чтобы проследить количественные соотношения между  $\theta$  и  $\psi$  при больших значениях времени  $t$ , необходимо привлечь нелинейную модель, так как значения угла  $\chi_1$  выходят за рамки пригодности линейной теории.

Положим  $w = 0$ . Тогда  $\chi = -\beta a_1^{-1} [a_3 v + (a_5 v^2 - a_4) t]$ , т. е. бицикл равномерно падает. Вычисления показывают, что с увеличением хотя бы одной из величин  $\beta$  или  $v$  время применимости линейной теории уменьшается. Радиусы кривизны

$$R_1 = \beta^{-1} (c_1 c^{-1} v^{-1} + c^{-1} t \cos \lambda)^{-1}, \quad R_2 = \beta^{-1} [(c_1 c^{-1} + \cos \lambda) v^{-1} + c^{-1} t \cos \lambda]^{-1}$$

траекторий точек  $K_1$  и  $K_2$  с увеличением угловой скорости  $\psi' = \beta$  поворота переднего колеса уменьшаются (при этом промежуток времени, когда переменные остаются малыми, также уменьшается). На фиг. 3, б пунктирной линией изображен график функции  $R_1(t)$ , сплошной — функции  $R_2(t)$ . Кривые 1–3 построены при  $\beta = 0.1 \text{ рад/сек}$ , кривые 4–6 — при  $\beta = 0.01 \text{ рад/сек}$ . Для кривой 1 скорость движения  $v = 5 \text{ м/сек}$ , кривые 2 и 4 соответствуют  $v = 15 \text{ м/сек}$ , для кривой 3 скорость  $v = 45 \text{ м/сек}$ . Кривые 5 и 6 построены соответственно при  $5 \text{ м/сек} \leq v \leq 15 \text{ м/сек}$  и  $15 \text{ м/сек} \leq v \leq 45 \text{ м/сек}$ .

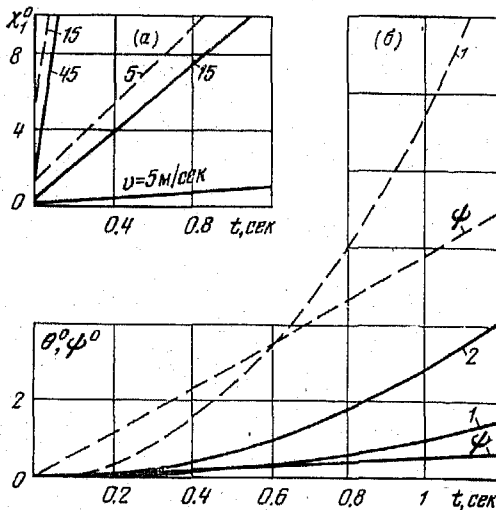
При увеличении скорости  $v$  время  $t$  применимости линейной теории уменьшается, т. е. одновременно уменьшаются оба слагаемых знаменателей  $R_1$  и  $R_2$ . Но  $c_1 c^{-1} \ll \cos \lambda$  (для приведенных числовых данных  $c_1 c^{-1} = 0.039$ ,  $\cos \lambda = 0.906$ ). Это вызывает большую чувствительность  $R_2$  к изменению  $v$ , чем  $R_1$ . Сравнение числовых значений показывает, что  $R_1$  практически не зависит от  $v$ , так что  $R_1$  можно аппроксимировать формулой  $R_1 \approx c \beta^{-1} t^{-1} \cos^{-1} \lambda$ . Результаты, получаемые по этой приближенной формуле, незначительно завышены. Влиянием  $v$  на  $R_2$  пренебречь нельзя.

В начале поворота, когда  $t$  мало, при малых  $v$  имеет место неравенство  $R_1 > R_2$ . В процессе поворота, т. е. с увеличением  $t$ , значения  $R_1$  и  $R_2$  выравниваются, кривые  $R_1 = R_1(t)$ ,  $R_2 = R_2(t)$  сближаются, но так, что  $R_1 > R_2$  во все время поворота.

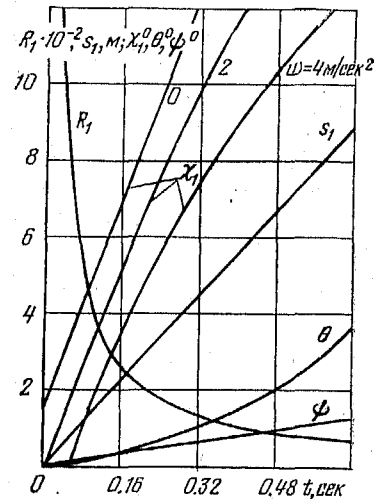
Из (3.1) при  $w = 0$  получаем линейную зависимость угла  $\chi$  от времени

$$\chi_1 = -\chi = \beta a_1^{-1} [a_3 v + (a_3 v^2 - a_4) t]$$

На фиг. 4 сплошные линии соответствуют  $\beta = 0.01 \text{ рад/сек}$ , пунктирные —  $\beta = 0.1 \text{ рад/сек}$ . Сплошные прямые охватывают весь квадрант фиг. 4, а, т. е. скорость  $v$  движения биккла существенно влияет на угол крена  $\chi_1$ . Увеличение значения  $\beta$  при  $v = \text{const}$  также резко влияет на угол  $\chi_1$ . Одновременное увеличение  $v$  и  $\beta$  приводит к значительному росту  $\chi_1$ .



Фиг. 4



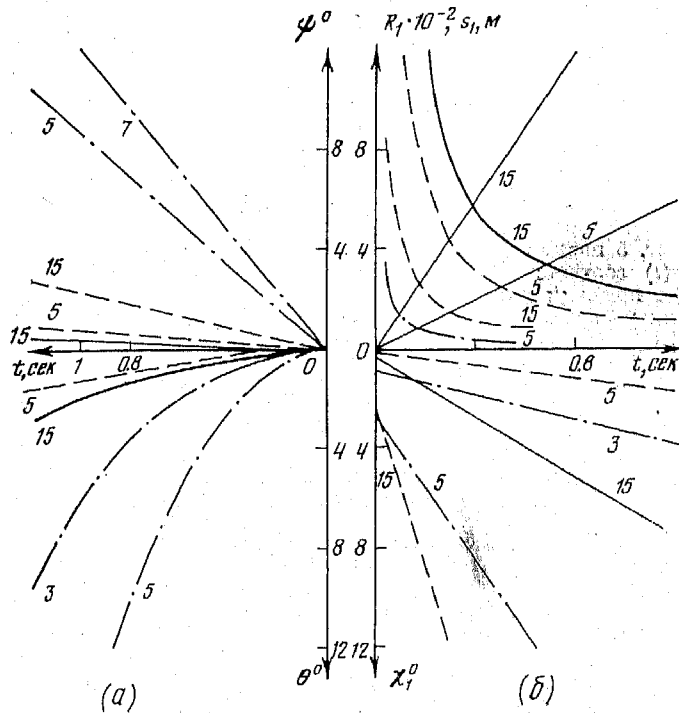
Фиг. 5

Угол  $\theta$  поворота биккла определяется выражением  $\theta = \beta c^{-1} (c_1 t + \frac{1}{2} v t^2 \cos \lambda)$ .

На фиг. 4, б цифрой 1 обозначены кривые  $\theta = \theta(t)$ , построенные для  $v = 5 \text{ м/сек}$ ; цифрой 2 — для  $v = 15 \text{ м/сек}$ . В начале поворота  $\theta < \psi$ , по прошествии некоторого времени угол  $\theta$  становится и остается большим  $\psi$ : для вовлечения биккла в поворот передним колесом требуется определенное время, затем биккл поворачивается быстрее, чем изменяется угол  $\psi$ . Это вызвано тем, что угловая скорость  $\theta' = \beta c^{-1} (c_1 + v t \cos \lambda)$  при малых  $t$  меньше угловой скорости  $\beta$  поворота руля ( $c_1/c \ll 1$ ). С возрастанием времени угловая скорость  $\theta'$  поворота биккла быстро превосходит  $\beta$ . Так, для  $v = 5 \text{ м/сек}$  имеем  $\theta'/\beta = 0.039 + 3.235t$ . Если  $t = 0.2 \text{ сек}$ , то  $\theta'/\beta = 0.686 < 1$ ; при  $t = 0.3 \text{ сек}$  получаем  $\theta'/\beta = 1.01 > 1$ .

Траекториями точек  $K_1$ ,  $K_2$  являются кубические параболы, ординаты точек которых значительно меньше абсцисс:  $y \ll x$ ,  $y' \ll x'$ . Это является следствием линеаризации теории:  $s_1 = v t \approx x$ ,  $y$  — малая величина.

4. Пусть точка  $K_1$  движется по заданной траектории (программе), соответствующее движение биккла назовем программным. Требуется определить динамические характеристики биккла.



Фиг. 6

В качестве программной кривой возьмем клотоиду  $R_1 s_1 = \gamma$ ,  $\gamma = \text{const}$ , движение равнозамедленное:  $v = v_0 - wt$ . Тогда

$$R_1 = \gamma (v_0 t - 1/2 w t^2)^{-1}, \quad \theta = 1/2 \gamma^{-1} (v_0 t - 1/2 w t^2)^2$$

Чтобы точка  $K_1$  двигалась по клотоиде из состояния  $\psi_0 = 0$ , следует взять

$$\psi = c c_1 \gamma^{-1} \cos^{-2} \lambda \{ \exp[-c_1^{-1} (v_0 t - 1/2 w t^2) \cos \lambda] - 1 \} + c \gamma^{-1} (v_0 t - 1/2 w t^2) \cos^{-1} \lambda$$

Угол  $\chi$  определяется дифференциальным уравнением

$$(\chi'' - r^2 \chi) \gamma c^{-1} \cos \lambda = -a_{21} w + a_{31} (v_0 - wt)^2 + [a_{61} w - a_{41} + a_{51} (v_0 - wt)^2] (-c_1 / \cos \lambda + v_0 t - 1/2 w t^2) + \exp[-c_1^{-1} (v_0 t - 1/2 w t^2) \cos \lambda] \{ a_{21} [w + c_1^{-1} (v_0 - wt)^2 \cos \lambda] - a_{31} (v_0 - wt)^2 + c_1 [a_{61} w - a_{41} + a_{51} (v_0 - wt)^2] \cos^{-1} \lambda \}, \quad a_{21} = a_2 / a_0, \quad a_{31} = a_3 / a_0 \quad (4.1)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_0 &= 12 a_{51} r^{-6} w^3 + (a_{61} + 2 a_{51} c_1 \cos^{-1} \lambda - 2 a_{31}) r^{-4} w^2 + 5 a_{51} r^{-4} v_0^2 w + \\ &+ (a_{21} - a_{41} r^{-2} + a_{61} c_1 \cos^{-1} \lambda) r^{-2} w + r^{-2} v_0^2 (a_{51} c_1 \cos^{-1} \lambda - a_{31}) - a_{41} c_1 r^{-2} \cos^{-1} \lambda \\ A_1 &= -12 a_{51} r^{-4} v_0 w^2 + r^{-2} v_0 w (2 a_{31} - 2 a_{51} c_1 \cos^{-1} \lambda - a_{61}) - a_{51} r^{-2} v_0^3 + a_{41} r^{-2} v_0 \\ A_2 &= 6 a_{51} r^{-4} w^3 + r^{-2} w^2 (1/2 a_{61} + a_{51} c_1 \cos^{-1} \lambda - a_{31}) + 5/2 a_{51} r^{-2} v_0^2 w - 1/2 a_{41} r^{-2} w \\ A_3 &= -2 a_{51} r^{-2} v_0 w^2, \quad A_4 = 1/2 a_{51} r^{-2} w^3 \end{aligned}$$

Частное решение уравнения (4.1), соответствующее начальным условиям

$$\chi_0 = c \gamma^{-1} A_0 \cos^{-1} \lambda, \quad \chi_0' = c \gamma^{-1} A_1 \cos^{-1} \lambda,$$

имеет вид

$$\chi = \frac{c}{\gamma \cos \lambda} \left\{ \sum_{n=0}^4 A_n t^n + \frac{\exp(rt)}{2r} \int_0^t [a + b (v_0 - wt)^2] \times \right.$$

$$\times \exp \left[ \left( -r - \frac{v_0}{c_1} \cos \lambda \right) t + \frac{w \cos \lambda}{2c_1} t^2 \right] dt - \frac{\exp(-rt)}{2r} [a + b(v_0 - wt)^2] \times$$

$$\times \exp \left[ \left( r - \frac{v_0}{c_1} \cos \lambda \right) t + \frac{w \cos \lambda}{2c_1} t^2 \right] dt \Big\}$$

$$a = a_{21}w + c_1(a_{01}w - a_{41}) \cos^{-1} \lambda, \quad b = a_{21}c_1^{-1} \cos \lambda + a_{31}c_1 \cos^{-1} \lambda - a_{31}$$

Кривые фиг. 5 построены при  $\gamma = 600 \text{ м}^2$ ,  $v_0 = 15 \text{ м/сек}$ ; графики функций  $R_1(t)$ ,  $s_1(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$  соответствуют значению  $w = 4 \text{ м/сек}^2$ . Ускорение  $w$  существенно влияет на угол крена  $\chi$ ; углы  $\theta$ ,  $\psi$ , а также величины  $R_1$ ,  $s_1$  зависят от  $w$  весьма слабо, значения ускорения  $w$  влияют на них лишь так, что с возрастанием  $w$  промежутки  $[0, t]$  применимости линейной теории увеличивается.

При  $w = 0$

$$\chi = c\gamma^{-1} \cos^{-1} \lambda \left\{ A_0 + A_1 t + \frac{a + bv_0^2}{(v_0 c_1^{-1} \cos \lambda)^2 - r^2} \exp(-v_0 c_1^{-1} t \cos \lambda) + \right.$$

$$\left. + \frac{a + bv_0^2}{2r} \left[ \frac{\exp(rt)}{r + v_0 c_1^{-1} \cos \lambda} + \frac{\exp(-rt)}{r - v_0 c_1^{-1} \cos \lambda} \right] \right\}$$

Этот случай иллюстрирует фиг. 6, а, б; варьируемыми являются параметры  $v_0$ ,  $\gamma$ . Сплошные кривые построены при  $\gamma = 3375 \text{ м}^2$ , пунктирные — при  $\gamma = 600 \text{ м}^2$ , штрихпунктирные соответствуют  $\gamma = 50 \text{ м}^2$ . Цифры возле кривых показывают значения  $v_0$  в м/сек. На фиг. 6, а изображены кривые  $\psi = \psi(t)$  и  $\theta = \theta(t)$ , в верхней половине фиг. 6, б показаны графики функций  $R_1(t)$  (лучи) и  $s_1(t)$  (гиперболические кривые), в нижней половине фиг. 6, б приведены кривые  $\chi_1 = \chi_1(t)$ .

С увеличением параметра  $\gamma$  кривоизгибность ее кривизна уменьшается. Из фиг. 6 следует, что при этом углы  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\chi_1 = -\chi$  поворота переднего колеса, поворота бицикла и его крена уменьшаются.

При неизменном  $\gamma$  все три угла возрастают с увеличением начальной скорости  $v_0$  движения бицикла, угол крена растет быстрее остальных углов.

Поступила 18 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
2. Jones E. H. The stability of the bicycle. Phys. Today, 1970, vol. 23, No. 4.
3. Sharp R. S. The stability and control of motorcycles. J. Mech. Engng Sci., 1971, vol. 13, No. 5.
4. Maryniak J., Goraj Z. Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1974, t. 12, No. 4.
5. Kane T. R. Fundamental kinematical relationships for singletrack vehicles. Internat. J. Mech. Sci., 1975, vol. 17, No. 8.
6. Boltzmann L. Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nicht holonome generalisierte Koordinaten. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Math.—naturwiss. Kl., Dez. 1902, Bd 111.
7. Hamel G. Die Lagrange — Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Z. Math. und Phys., 1904, Bd 50, S. 1—57.
8. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 3. М.—Л., Гостехиздат, 1938.
9. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 2. М., Гостехиздат, 1954.