

# De stabiele fiets

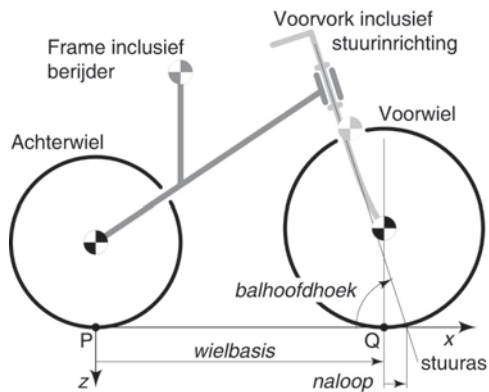
Een fiets is eigenlijk een heel raar ding. Als je hem vanuit stilstand loslaat, valt hij meteen om maar, als hij een beetje snelheid heeft, lijkt het wel of hij vanzelf rechtop blijft. Hoe komt dat nu? Sinds de uitvinding van de moderne fiets, zo rond 1890 (even grote wielen, luchtbanden, schuine voorvork en kettingaandrijving) hebben vele mensen dit zich wel afgevraagd. Carvallo [1] en Whipple [2] waren de eersten die een dynamische analyse maakten om in theorie te laten zien wat al in de praktijk bekend was, dat sommige fietsen uit zichzelf stabiel kunnen zijn als ze met de juiste voorwaartse snelheid rijden. Sindsdien is dit een steeds weer terugkerend onderwerp, zowel in de wetenschappelijke literatuur als in de meer populaire pers. Bij nader onderzoek blijken deze publicaties echter allemaal een beetje te verschillen, zowel wat model als wat conclusies betreft. Dit vraagt om opheldering [3]. Arend L. Schwab en Jaap P. Meijaard

24

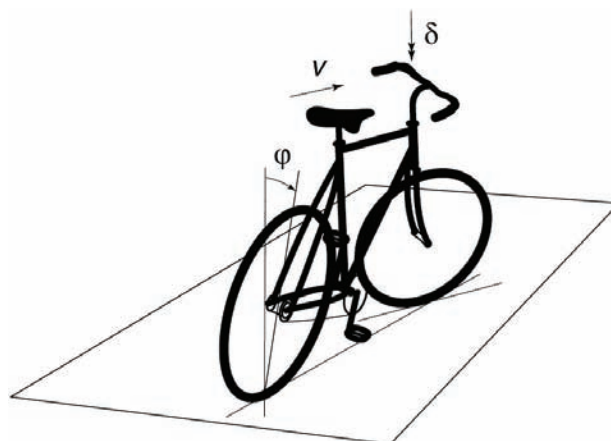


Foto: Sam Rentmeester/FMAX

**Figuur 1** Een typische run met de meetfiets.



Figuur 2 Eenvoudig model van een fiets.



Figuur 3 Fietsmodel met vrijheidsgraden.

Arend L. Schwab is universitair docent aan de Technische Universiteit Delft, faculteit werktuigbouwkunde, laboratorium voor Technische Mechanica. Hij is werkzaam op het gebied van de dynamica van mechanische systemen, de zogenaamde Multibody Dynamica. Hij is vooral geïnteresseerd in contactproblemen zoals die ontstaan bij rollen en botsingen. Hij houdt zich ook bezig met de dynamica van vervormbare *multibody*-systemen, eindige elementen methode, lopende robots en de dynamica van de fiets. Dit artikel vloeit voort uit de samenwerking tussen Cornell University en de universiteit van Nottingham welke tijdens zijn sabbatical jaar (2002/2003) op Cornell is begonnen.



Jaap Meijaard was werkzaam op het gebied van de dynamica van motorfietsen bij Mechanical Engineering aan de Universiteit van Nottingham en is nu onderzoeker bij de vakgroep werktuigbouwkundige Automatisering aan de Universiteit Twente. Zijn belangstelling gaat uit naar alles wat beweegt.



wordt toegevoegd of afgenomen; de totale energie van het systeem blijft dus constant.

Dit model heeft drie onafhankelijke bewegingsmogelijkheden, oftewel drie graden van vrijheid.

Deze zijn de voorwaartse snelheid  $v$ , de leunhoek van het frame  $\phi$  en de stuurhoek  $\delta$ , zie figuur 3. In dit geval zijn wij geïnteresseerd in de stabiliteit van het rechttuit rijden. Met behulp van de bewegingswetten voor starre lichamen van Newton en Euler, en rekening houdend met de verbindingsvoorwaarden, kunnen wij deze bewegingsvergelijkingen afleiden. Voor kleine verandering bij het rechttuit rijden blijkt de voorwaartse beweging ontkoppeld te zijn van de zijdelingse beweging en het sturen: hier geldt dan bij benadering  $v = \text{constant}$ . Voor de resterende zijwaartse bewegingen krijgen wij twee gekoppelde tweede-orde differentiaalvergelijkingen van de algemene vorm  $M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f$ , net als bij een enkelvoudig massa-

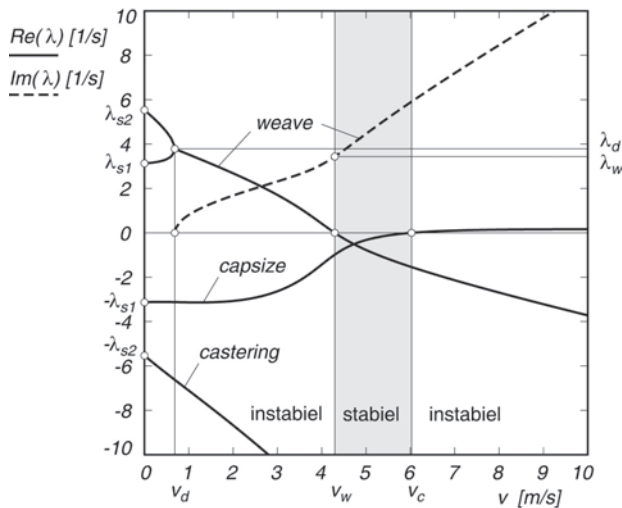
veer-dempersysteem maar nu met de vector  $q = (\phi, \delta)$ , voor de twee resterende vrijheidsgraden en zijn tijdsafgeleiden, de snelheid  $\dot{q}$  en de versnelling  $\ddot{q}$ , de massamatrix  $M$ , de stijfheidsmatrix  $K$  en de dempingsmatrix  $C$ . Voor een standaardfiets met berijder zijn de specifieke bewegingsvergelijkingen zoals aangegeven in het kader hieronder.

De 'krachten' in het rechterlid zijn het leunmoment  $T_\phi$  en het stuurmoment  $T_\delta$ . Dit stuurmoment is het moment dat een berijder eventueel zou kunnen uitoefenen. Het aanbrenge van een leunmoment is wat lastiger maar denk hier bijvoorbeeld aan een zijdelingse windvlaag of een ouder die een kind ondersteunt tijdens het rijden. De coëfficiënten in deze bewegingsvergelijkingen zijn zoals die voor een standaardfiets met berijder en uitgedrukt in de bekende SI-eenheden meter, kilogram en seconde, en  $g$  is de versnelling van de zwaartekracht. In het algemeen zijn deze coëfficiënten een functie van de 25 parameters waarmee het model van de fiets is gedefinieerd [3]. Denk hierbij aan wielbasis, balhoofdhoek, naloop, maar ook de positie van het massamiddelpunt, de massa en de massastraagheidsmomenten van alle onderdelen.

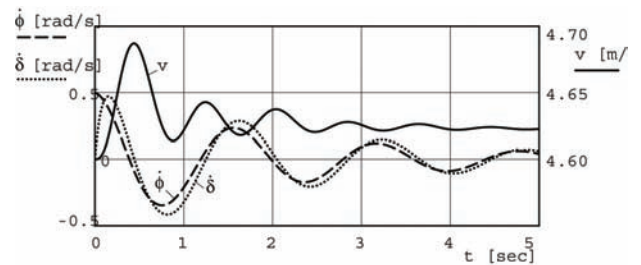
Wat allereerst opvalt aan de bewegingsvergelijkingen is dat de voorwaartse snelheid  $v$  een parameter is. De oplossing hangt dus af van  $v$ , maar

Een van de eenvoudigste modellen om het dynamisch gedrag van de fiets te onderzoeken bestaat uit een systeem van vier starre lichamen onderling verbonden door scharnieren. De vier onderdelen zijn het frame, de voorvork met stuurinrichting en de twee wielen, zie figuur 2. Wij veronderstellen dat de berijder star met het frame is verbonden en met losse handen fietst. Dat star verbonden zijn lijkt wat grof maar bij nader onderzoek blijkt het een aardige benadering te zijn. Het contact tussen de wielen en de vlakke grond wordt ideaal verondersteld, oftewel zuiver rollend en zonder zijdelingse slip. Ook verwaarlozen we de wrijving van de bewegende delen van de fiets, zodat er bij afwezigheid van aandrijving of remmen geen energie

$$\begin{bmatrix} 81 & 2,3 \\ 2,3 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 & 34 \\ -0,9 & 1,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \left\{ g \begin{bmatrix} -81 & -2,6 \\ -2,6 & -0,8 \end{bmatrix} + v^2 \begin{bmatrix} 0 & 77 \\ 0 & 2,7 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \phi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \end{bmatrix} \quad (1)$$



**Figuur 4** Eigenwaarden  $\lambda$  voor een standaardfiets plus berijder bij het voorwaartse snelheidsgebied  $0 < v < 10$  m/s. Het reële deel van de eigenwaarde wordt weergegeven door een getrokken lijn en het imaginaire deel door een gestippelde lijn. De fiets is stabiel in het snelheidsgebied  $v_w < v < v_c$ , met de *weave*-snelheid  $v_w \approx 4,3$  m/s en de *capsize*-snelheid  $v_c \approx 6,0$  m/s.

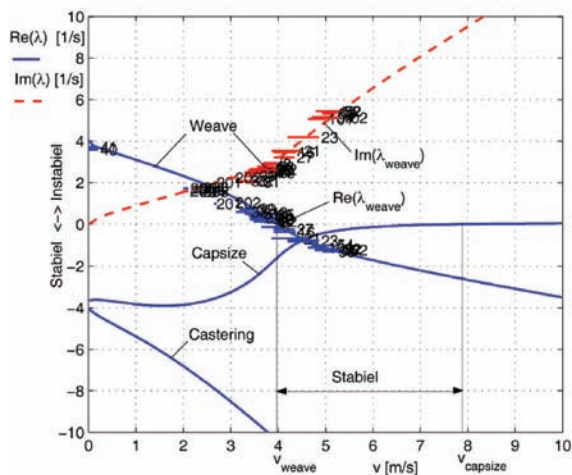


**Figuur 5** Volledig niet-lineaire responsie van een standaardfiets met berijder bij een initiële voorwaartse snelheid van 4,6 m/s en een initiële leunhoeksnelheid van 0,5 rad/s. De fiets is in het stabiele snelheidsgebied en de zijwaartse beweging dempt uit. De voorwaartse snelheid neemt iets toe van 4,6000 tot 4,6223 m/s.

dat hadden we al gezien in het experiment. Verder zien wij dat de stijfheidsmatrix  $K$  de som is van zwaarte-krachttermen en termen kwadratisch in  $v$ . Deze laatste zijn het gevolg van het zogenaamde gyroscopische en het centrifugaal effect. Het karakter van de totale stijfheid wordt dus sterk beïnvloed door de voorwaartse snelheid. Bij snelheid nul zijn alle termen negatief, en daarom is de fiets instabil net als bij een omgekeerde slinger. Bij toenemende snelheid veranderen de twee laatste termen van teken en kunnen deze stijfheden positief worden. Wat voor uitwerking dat op het gedrag van het systeem heeft, is hier nog niet duidelijk maar zien wij straks. Merk op dat de stijfheid nu ook asymmetrisch wordt. De dempingsmatrix  $C$  is lineair in de voorwaartse snelheid en het gevolg van gyroscopische effecten en de voorwaartse snelheid. Maar, let op, er is geen echte demping, ons model is namelijk energie behoudend. De energie die in de zijwaartse beweging wordt uitgedempt zal dus niet echt verdwijnen. Later meer hierover. Wat vertellen deze bewegingsvergelijkingen ons? Bij bepaalde beginvoorwaarden voor de hoeken en hoeksnelheden kunnen wij de beweging van de fiets uitrekenen. Dit kan natuurlijk numeriek, maar omdat in onze benadering de differentiaalvergelijkingen lineair zijn, kunnen wij ook analytische oplossingen constr-

eren. De algemene oplossing van de bijbehorende homogene ( $f=0$ ) lineaire differentiaalvergelijking is de exponentiële functie. Wij substitueren dus oplossingen volgens  $\phi = \phi_0 e^{\lambda t}$  en  $\delta = \delta_0 e^{\lambda t}$ . Hierin zijn  $q_0 = (\phi_0, \delta_0)$  de beginvoorwaarden. De coëfficiënt  $\lambda$  wordt bepaald door de voorwaarde dat het stelsel  $[\lambda^2 M + \lambda C + K]q_0 e^{\lambda t}$  niet-triviale oplossingen heeft. Dit resulteert in vier mogelijke (complexe) oplossingen voor  $\lambda$  en het teken van het reële deel van deze coëfficiënt bepaalt of de oplossing een stabiele ( $\Re \lambda < 0$ ), dan wel instabiele ( $\Re \lambda > 0$ ) beweging beschrijft. De stabiliteit van het systeem is dus onafhankelijk van de beginvoorwaarden en hangt alleen maar af van het reële deel van de eigenwaarden. Voor de standaardfiets met berijder zijn deze eigenwaarden uitgerekend bij verschillende voorwaartse snelheden en weergegeven in figuur 4. Op de horizontale as staat de voorwaartse snelheid en op de verticale as staan de eigenwaarden. Er zijn er altijd vier omdat de karakteristieke vergelijking een polynoom van de vierde graad is. Merk op dat complex toegevoegde eigenwaarden zoals  $\lambda = d \pm \omega i$  altijd in paren komen. Bij zo'n eigenwaarde hoort ook een eigenvector welke de bijbehorende beweging beschrijft. Voor een gewone fiets inclusief berijder ziet het eigenwaardeplotje er meestal uit zoals figuur 4. Bij stilstand ( $v=0$ )

zijn er precies twee paren reële eigenwaarden  $\lambda_{s1} \approx \pm 3,1$  en  $\lambda_{s2} \approx \pm 5,5$ . Voor de positieve eigenwaarden is de bijbehorende eigenbeweging als die van een omvallende slinger, bij  $\lambda_{s1}$  leunt de fiets vooral en stuurt weinig en bij  $\lambda_{s2}$  net andersom. De fiets valt dus gewoon om. De bijbehorende negatieve eigenwaarden en eigenbewegingen beschrijven dezelfde valbeweging maar nu met de tijd omgedraaid; de fiets valt terug omhoog. Bij een toenemende snelheid vanaf nul zien wij dat de eigenwaarden zich alle verschillend ontwikkelen. Er zijn duidelijk drie hoofdbewegingen te ontdekken. De eerste is de *castering*-beweging. Dit is een uiterst stabiele bewegingsvorm waarbij het voorwiel snel terugdraait in de evenwichtsstand, net als bij de zwenkwielletjes van een boodschappenwagentje. De tweede is de *capsize*-beweging, de fiets valt hier om waarbij het stuur haast niet beweegt, net als bij een kapseizend schip. Deze mode is eerst stabiel maar wordt boven de *capsize*-snelheid  $v_c \approx 6,0$  m/s licht instabil. Wij zeggen licht omdat deze positieve eigenwaarde maar heel klein is, in de orde van  $0,01 \text{ s}^{-1}$ . Het duurt dus echt heel lang voor je omvalt, een verdubbeling van een initiële uitwijking duurt ongeveer  $\ln(2)/0,01 \approx 70$  seconden. Deze instabiliteit is praktisch geen probleem: zonder het te merken regelt iedere berijder deze weg. De derde hoofdbeweging is de *weave*, waarbij de fiets heen en weer slingerend en er een klein faseverschil is tussen de stuur- en leunbeweging. De *weave*-bewegingsvorm is een oscillatie die pas begint



Figuur 6 Gemeten eigenwaarden van de weave-beweging voor de meetfiets van figuur 5.

bij een bepaalde snelheid, zo rond de 1 m/s. Daaronder zijn er alleen maar exponentieel groeiende of afnemende bewegingen. In eerste instantie is deze *weave* instabiel maar bij de voorwaartse snelheid  $v_w \approx 4,3$  m/s wordt hij stabiel. Kijkend naar het diagram zien wij dus dat er een snelheidsgebied is waarvoor de fiets stabiel is. Dat wil zeggen, kleine initiële uitwijkingen worden uitgedempt en dat is nu precies wat wij in het experiment ook zagen. De conclusie is dat een fiets bij lage snelheid, dat is onder de 15 km/h, instabiel is, vervolgens tussen de 15 en 20 km/h stabiel en boven de 20 km/h licht instabiel. Praktisch gesproken is de fiets dus stabiel boven de 15 km/h. Nu gelden deze waarden voor een standaardfiets met berijder. Andere ontwerpen zoals een racefiets of een zogenaamde omafiets geven net weer wat andere resultaten. Een racefiets heeft een wat steilere balhoofdhoek en een wat kortere wielbasis in vergelijking met een omafiets. Er zijn echter veel meer parameters die de stabiliteit van de fiets bepalen, zo'n 25 in totaal. Met behulp van de uitdrukkingen uit [3] kan zo een fietsontwerp geoptimaliseerd worden. Wat je nu precies wil optimaliseren is nog niet duidelijk. Het is namelijk niet gezegd dat je altijd een zo stabiel mogelijke fiets wil hebben, want dat zou wel eens lastig kunnen zijn bij het snel willen manoeuvreren. Verder bestaan er ook meer exotische fietsontwerpen zoals de vouwfiets of ligfiets. Hierbij heeft de ontwerper helemaal geen houvast en wij zien dus ook nog een overvloed aan verschillende ontwer-

pen. De standaardfiets is ontstaan in een evolutieproces en er is weinig tot geen wetenschap aan te pas gekomen. Dat is op zich niet slecht en het huidige ontwerp van de gewone fiets is erg goed, maar zo'n proces duurt lang. Het heeft dan ook even geduurd voordat de uiteindelijke fiets zoals wij die nu kennen is ontstaan. Het eerste ontwerp van een loopfiets *cléripède* is van 1816 en de uiteindelijke fiets of *safety bicycle* is van rond 1896, een ontwikkeling van zo'n 80 jaar [4]. De resultaten van dit onderzoek kunnen dus zeker worden toegepast bij het verbeteren van het ontwerp van meer exotische fietsen. In plaats van knutselen kan de fiets direct vanachter de tekenplank worden ontworpen op stabiliteit. Blijft nog de vraag waar dan die energie blijft als de fiets stabiel is. Volgens de gelineariseerde vergelijkingen dempt in het stabiele snelheidsgebied de leun- en stuurbeweging uit, maar ons volledige (niet-lineaire) model is energiebehoudend dus hoe kan dat nu? Wel, de fiets gaat harder. De energie van de zijwaartse beweging wordt toegevoegd aan de energie van de voorwaartse beweging (andersom is niet mogelijk). Onze gelineariseerde bewegingsvergelijkingen beschrijven dit niet, daar vonden wij namelijk  $v = \text{constant}$ . Het is een zogenaamd effect van de tweede orde: zowel een

## Experiment



Bij een beetje snelheid blijft een fiets vanzelf overeind: wij zeggen dan dat de fiets zelfstabiel is. Je kan dit experiment zelf heel eenvoudig doen. Neem een oude fiets en een grote open ruimte, bijvoorbeeld een parkeerplaats. Breng de fiets al rennend op gang, laat hem los en geef een duwtje opzij. Als de snelheid te laag is, gaat hij steeds erger slingeren en valt hij uiteindelijk om: instabiel dus. Maar je zult zien dat boven een bepaalde snelheid de fiets zich vanzelf weer opricht: stabiel dus!

Een filmpje hiervan is te zien op: [http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/bicycle\\_mechanics/bicycle\\_stability.mov](http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/bicycle_mechanics/bicycle_stability.mov).

positieve als een negatieve initiële leunhoeksnelheid zorgen uiteindelijk voor een toename van de voorwaartse snelheid.

Als voorbeeld nemen we een volledige niet-lineaire bewegingsanalyse van de standaardfiets met berijder bij een initiële voorwaartse snelheid van 4,60 m/s en een initiële leunhoeksnelheid van 0,5 rad/s. Dit is in het stabiele snelheidsgebied en we zien in figuur 5 dat de zijwaartse beweging uitdempt. Tevens zien wij dat de voorwaartse snelheid enigszins toeneemt naar 4,62 m/s. Deze snelheidstoename is eenvoudig na te rekenen. De effectieve massa gekoppeld aan de voorwaartse beweging is  $m_e = 97,629$  kg, dit is het resultaat van de totale massa en de massastraagheid van de wielen. De waarde van de eindsnelheid als de zijwaartse beweging volledig is 'uitgedempt' volgt nu uit de wet van behoud van mechanische energie,  $\frac{1}{2}m_e v_0^2 + \frac{1}{2}M(1,1)\dot{\phi}_0^2 = \frac{1}{2}m_e v_1^2$  oftewel  $v_1 = 4,6223$  m/s. Het tweede orde effect is nu ook duidelijk te zien in figuur 5, de frequentie van de slingering in de voorwaartse snelheid is twee keer zo groot als de frequentie van de leun- en stuurhoekslingerings. Overigens, zo kan je een fiets dus ook versnellen: door wild het stuur heen en weer te bewegen.

Hoe goed zijn deze vergelijkingen nu? Om ons model zo eenvoudig mogelijk te houden en om de essentie van de beweging van de fiets te kunnen onderzoeken hebben wij een aantal veronderstellingen gedaan. Zoals bijvoorbeeld geen wrijving in de scharnieren, volledig starre lichamen en stijve zuiver rollende banden. Van al deze veronderstellingen is die over de banden wel het meest onzeker. Om ons model te testen hebben wij metingen aan de beweging van een fiets gedaan. Hiervoor hebben wij een standaardfiets voorzien van sensoren om de verschillende bewegingen te kunnen meten en een laptop op de bagagedrager om al de meetgegevens te verzamelen, zie figuur 1 [5]. Deze fiets werd met de hand op snelheid gebracht en vervolgens losgelaten. In het instabiele snelheidsgebied viel hij vanzelf om, de zijwieltjes ving hem hier op. In het stabiele snelheidsgebied gaven wij de fiets bewust een zijwaartse uitwijking door hem een klap

te geven, zie figuur 1. Uit de meetgegevens werd bij verschillende voorwaartse snelheden de frequentie en demping of opslinging van de leunen stuurhoek bepaald. Dit zijn dan de gemeten eigenwaarden van de belangrijkste beweging, de *wave*-beweging. Vervolgens zijn deze vergeleken met de berekende uit het model, zie figuur 6. Wij zien dat in het snelheidsgebied van 2 tot 6 m/s (harder konden wij niet rennen) de gemeten eigenwaarden heel goed overeen komen met de berekende eigenwaarden. Ook is heel duidelijk de omslag van instabiel naar stabiel te zien. Conclusie: het eenvoudige model van de fiets beschrijft zeer goed het werkelijke gedrag. Wil je nog wat meer lezen over het onderzoek naar de stabiliteit van de fiets, bijvoorbeeld wie van de meer dan 50 publicaties hadden het nu wel helemaal goed (het was er maar één), lees dan onze uitgebreide studie zoals recent verschenen bij de *Proceedings of the Royal Society* [3].

Tot slot, welke kant moet je op sturen om naar rechts te gaan? Welnu, even kort naar links en dan niets meer doen. De fiets valt dan vanzelf naar rechts. Hiervan is een grafische toelichting te zien op [www.ntvn.nl](http://www.ntvn.nl). Probeer het zelf maar eens.

## Referenties

- 1 E. Carvallo 1899 *Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette*. Paris, France: Gauthier-Villars, ingediend in 1897 voor de Prix Fourneyron, gedeelde tweede plaats toegekend in 1898).
- 2 F. J. W. Whipple 1899 *The stability of the motion of a bicycle*. *Quart. J. Pure Appl. Math.* **30**, 312–348.
- 3 J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina & A. L. Schwab, 2007 *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*, *Proceedings of the Royal Society A* **463**, 1955–1982.
- 4 D. V. Herlihy 2004 *Bicycle: the history*. New Haven, CT: Yale University Press.
- 5 J. D. G. Kooijman, A. L. Schwab & J. P. Meijaard 2007 *Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle*. *Multibody Syst. Dyn.* (first online).

Ken uw klassieken



28

# Het Stern-Gerlach-experiment

## slechte sigaren als oplossing van een cruciaal experiment voor een verkeerde theorie

O. Stern en W. Gerlach, *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantung im Magnetfeld*, *Zeitschrift für Physik* **9** (1922) 349 – 352.

De quantumtheorie van het licht vindt zijn oorsprong in het waterstofatoommodel van Niels Bohr (1913) volgens welke de elektronen zich rond de atoomkern in stationaire energiebanen bewegen, waartussen quantsprongen kunnen voorkomen onder uitzending van monochromatische straling. Hoewel het concept van de stationaire energietoestanden in totale tegenspraak was met de klassieke elektromagnetische theorie van Maxwell, werd het experimentele bewijs van het bestaan van stationaire energieniveaus spoedig daarna geleverd door James Franck en Gustav Hertz (1914), die daarvoor

in 1925 de Nobelprijs ontvingen. Volgens een toen bijna honderd jaar oude hypothese van André Marie Ampère wordt magnetisme veroorzaakt door elektrische stroompjes van atomen en moleculen in de materie – een hypothese die in 1915 door Albert Einstein en Wander de Haas experimenteel werd bevestigd (Einstein-De Haaseffect). Een circulaire stroom geeft dus aanleiding tot een magnetisch moment en een atoom kan beschouwd worden als een elementair magneetje. In een uitwendig homogeen veld zullen atomen een koppel ondervinden die de magnetische momenten evenwijdig aan het veld willen richten. Bij

een niet-homogeen magnetisch veld echter ontstaat daarbij ook een transversale component.

Volgens de klassieke Larmortheorie kunnen de magnetische momenten iedere willekeurige richting ten opzichte van het uitwendige veld aannemen, zodat in een niet-homogeen veld de uitwijkingen een continue verdeling geven. Volgens het quantumtheoretische atoommodel van Bohr-Sommerfeld echter, kunnen de magnetische momenten ten opzichte van het veld slechts bepaalde gequantiseerde waarden aannemen, namelijk (bij niet al te sterk veld)  $\mu_H = gM\mu_B$  (het Bohrmagneton  $\mu_B = eh/4\pi m_e$  =