



Линеаризованные динамические уравнения для равновесия и поворота велосипеда: тестовая модель и обзор литературы

Я. П. Мейярд, Дж. М. Пападопулос, Э. Руина, А. Л. Шваб

В работе представлены линеаризованные уравнения движения для модели велосипеда, впервые предложенной в работе [86]. Данная модель состоит из четырех продольно симметричных частей, соединенных между собой идеальными шарнирами: двух колес, рамы и переднего узла — руля и вилки. Колеса предполагаются осесимметричными бесконечно тонкими дисками, движущимися без проскальзывания по опорной поверхности. В остальном геометрия и распределение масс в модели предполагаются произвольными. Данная консервативная неголономная система имеет семь степеней свободы. В линеаризованных уравнениях движения из этих степеней свободы существенную роль играют только три:

J. P. Meijaard, Jim M. Padoopoulos, Andy Ruina, A. L. Schwab, *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*. Proc. R. Soc. A, 2007, vol. 463, pp. 1955–1982. Перевод с английского А. С. Кулешова.

Работа Я. М. была поддержана Советом по исследованиям в области инженерии и физических наук (EPSRC) Великобритании, Э. Р. и Дж. П. были поддержаны грантом для молодых исследователей, выдаваемым фондом NSF. Работа А. Ш. была поддержана грантами NSF по биомеханике и механике роботов.

Я. П. Мейярд
School of MMME, The University of Nottingham, University Park
Nottingham NG7 2RD, UK

Дж. М. Пападопулос
2802 West Carrera Court, Green Bay, WI 54311, USA

Э. Руина
Department of Mechanics, Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA

А. Л. Шваб
Laboratory for Engineering Mechanics, Delft University of Technology
Mekelweg 2, 2628 CD Delft, The Netherlands



угол наклона велосипеда к плоскости движения, угол поворота руля и угол, определяющий вращение заднего колеса. Для облегчения реализации модели мы выводим уравнения движения для этих трех переменных методически. Полученные уравнения движения пригодны, например, для изучения устойчивости прямолинейного равномерного движения неуправляемого велосипеда. Уравнения движения выводились вручную двумя способами и проверялись затем путем численного исследования. В почти вековой истории исследований велосипеда имеются работы, в которых получены уравнения движения велосипеда полностью согласующиеся с нашими. В других работах получены уравнения, не согласующиеся с тем, что получилось у нас. Нами предложены два теста, позволяющие проверить правильность вывода уравнений движения велосипеда, имеющихся в других работах, а также правильность численного исследования этих уравнений, если таковое проводилось. Помимо этого, полученные нами результаты могут служить для дальнейшего исследования динамики велосипеда. Для тестовой модели велосипеда мы аккуратно вычисляем характеристические значения (корни характеристического уравнения) и диапазон скоростей, в котором равномерное прямолинейное движение неуправляемого велосипеда является устойчивым, подтверждая известный уже долгие годы результат, что данная консервативная система может быть асимптотически устойчивой.

Ключевые слова: велосипед, мотоцикл, динамика, линейные уравнения, устойчивость, неголономная система

1. Введение

В 1818 году немецкий изобретатель Карл фон Дрез показал, что человек, передвигающийся вперед при помощи хитроумного изобретения, имеющего два колеса, расположенные на одной линии и похожего на самокат с сиденьем, сможет держать равновесие за счет управления передним колесом. Несколько позже, в 60-х годах XIX века, велосипеды, имевшие педали, при помощи которых осуществлялось прямое управление передним колесом (как у детских трехколесных велосипедов), также управлялись поворотом переднего колеса, производимым велосипедистом. Эти «драндулеты» имели два деревянных колеса одинакового радиуса и вертикально (не наклонно) расположенную ось поворота руля и вилки, проходящую непосредственно через центр переднего колеса. В 90-х годах XIX века уже практически любой человек мог научиться удерживать в вертикальном равновесии «безопасный велосипед», который имел пневматические колеса и цепную передачу. Но еще более важным для равновесия и управления велосипедом было то, что «безопасный велосипед» имел наклонную ось поворота руля и смещение вилки вперед по отношению к этой оси (передний вынос вилки), как у современных велосипедов. В 1897 году французский математик Э. Карвалло [15] и затем (в более общей форме) студент Кембриджского университета Ф. Уиппл [86], используя общие уравнения динамики твердого тела, обосновали теоретически то свойство, которое давно было известно на практике: некоторые безопасные велосипеды могут, двигаясь в специальном диапазоне скоростей, самостабилизироваться, то есть стабилизироваться без дополнительного управления со стороны велосипедиста. В наши дни представляются очевидными следующие две особенности движения человека на велосипеде:

1. Велосипедист, управляющий велосипедом, может обеспечивать вертикальное равновесие движущегося вперед велосипеда за счет поворота переднего колеса в направлении нежелательного наклона. Это действие перемещает точки контакта колес велосипеда

с опорной поверхностью, находящейся под велосипедистом, подобно тому, как перевернутая метла или палка могут быть уравновешены на открытой руке за счет движения руки в направлении их падения.

2. Некоторые неуправляемые велосипеды могут, тем не менее, удерживаться в вертикальном равновесии в процессе своего движения. Если соответствующему типичному велосипеду придать начальную скорость, равную примерно 6 м/с, то он будет устойчиво двигаться вперед до тех пор, пока его скорость не станет слишком низкой. Моменты, обеспечивающие это саморегулирование вертикального равновесия, возникают из различных геометрических, инерционных и гироскопических особенностей велосипеда.

Кроме этих двух основных свойств велосипеда, имеется весьма малое количество других особенностей его движения, обсуждаемых в литературе. Это вызвано, по-видимому, недостаточной потребностью в теоретических исследованиях. Методом проб и ошибок к 1890 году была разработана конструкция устойчиво движущегося велосипеда, практически не претерпевшая изменений до настоящего времени. Именно потому, что велосипед модифицировался в основном за счет опытных данных, а не за счет анализа уравнений, литературы, посвященной уравнениям движения велосипеда, имеется сравнительно мало.

Для того чтобы лучше удовлетворить общее любопытство об устойчивости движения велосипеда и, возможно, способствовать дальнейшему развитию его конструкции, мы стремимся установить здесь основные вопросы устойчивости движения велосипеда. Цель работы состоит в том, чтобы получить удобные в работе и полностью проверенные линеаризованные динамические уравнения движения достаточно сложной, но четко сформулированной модели велосипеда. Соответствующие уравнения имеют вид (5.3), а коэффициенты, входящие в эти уравнения, обсуждаются в дополнении А. Дальнейшие исследования устойчивости движения велосипеда, нацеленные, например, на получение точных оценок диапазона скоростей, упомянутых при описании второго основного свойства велосипеда (см. выше), могут быть проведены на основе уравнений (5.3).

Для вывода уравнений движения велосипеда можно использовать различные методы и вводить различные обобщенные координаты, что приводит, в конечном счете, к уравнениям движения разного вида, подчас совершенно не похожих друг на друга. В этом случае даже установить соответствие начальных условий для разных уравнений становится непосильной задачей. Однако корни характеристического уравнения (характеристические значения) и диапазон скоростей, необходимых для обеспечения устойчивости прямолинейного движения, не зависят от выбора обобщенных координат.

Таким образом, например, компьютерное исследование велосипеда, основанное на любой формулировке, может быть проверено на правильность и точность сравнением с тестовыми характеристическими значениями, полученными здесь.

Эта работа может получить более широкое применение, поскольку вопросы устойчивости движения велосипеда близки к вопросам об устойчивости походки и бега человека, а также к вопросам о катании на других устройствах, в которых имеется связь между наклоном, поворотом и вертикальным равновесием. Кроме того, имеется существенный недостаток нетривиальных примеров, с заранее известными решениями, которые могли бы использоваться для проверки различных устройств, моделирующих динамику систем твердых тел (такие, как используются, например, при создании автомобилей и мобильных роботов). Эта статья представляет такой нетривиальный пример.

2. Краткий обзор литературы

С момента своего создания велосипеды сразу же привлекли внимание многих известных в наши дни ученых XIX века, среди которых были специалист по термодинамике Уильям Ранкин, математики Карло Бурле, Поль Аппель и Эммануэль Карвалло, специалист по метеорологии Фрэнсис Уишл, специалист по математической физике Жозеф Буссинеск, физик Арнольд Зоммерфельд, работавший вместе с математиком Феликсом Клейном и инженером Фрицем Нётером (братом знаменитой Эммы Нётер). Последний пик внимания к динамике «одноколейного экипажа» случился в конце 60-х – начале 70-х годов XX века. По-видимому, он был вызван возникновением первых электронно-вычислительных машин, благодаря которым стало возможно численное исследование уравнений движения велосипеда, а также всевозрастающей популярностью больших мотоциклов (с возрастающей частотой аварийных происшествий с ними) и первыми мыслями об экологической безопасности. Среди статей, написанных в это время, выделяются работы специалистов по неголономной механике Неймарка и Фуфаева, а также работы Бреквелла и Кейна. Начиная с середины 70-х годов прошлого века, литература по этому вопросу отошла от традиционных твердотельных моделей, являющихся предметом данной статьи.

За последние 140 лет множество других людей изучало динамику велосипеда — с целью написания диссертации, как хобби или как часть повседневной работы со средствами передвижения. Эти редкие и различные по содержанию работы по динамике велосипеда, моделируемого как набор сочлененных твердых тел, описаны в обзоре, приведенном в работе [27]. Более общий, но менее критический исторический обзор, включающий в себя также модели велосипеда с упругими колесами, приведен в работе [74].

Многие работы по динамике велосипеда обсуждают возможные стратегии управления велосипедом со стороны велосипедиста. Эти стратегии формируются на основе качественных соображений о динамике велосипеда, которые слишком незначительны, чтобы проанализировать вопрос о стабилизации прямолинейного движения неуправляемого велосипеда. К работам такого типа следует отнести, в первую очередь, статью [3]. В статье [47] детально обсуждаются некоторые эффекты. Вопросам качественного описания динамики велосипеда посвящены также работы [1, 17, 18, 30, 32, 36, 41, 42, 51, 53, 56, 72, 83, 87].

Другой тип работ использует в исследовании аппарат математического анализа. Часть этих работ, направленная в основном на изучение управления велосипедом велосипедистом, использует модели, геометрия и распределение масс которых являются слишком простыми, чтобы при помощи этих моделей изучать эффект самостабилизации неуправляемого движения велосипеда. Другие, даже использующие сравнительно общую модель велосипеда, задают правила управления поворотом переднего колеса и, следовательно, не рассматривают неуправляемое движение велосипеда. К таким простым и/или изучающим вопросы управляемого движения велосипеда можно отнести статьи [5–7, 10–14, 22, 25, 26, 44, 45, 54, 63, 80].

Наконец, нам удалось найти около тридцати моделей велосипеда, основанных на уравнениях динамики твердого тела. Эти модели обладают достаточно общей геометрией и распределением масс, чтобы на их основе изучать вопросы самостабилизации прямолинейного движения неуправляемого велосипеда. Эти уравнения движения достаточно сложны, и разные авторы используют различные упрощающие предположения, различную параметризацию и различный набор динамических переменных. При этом большинство авторов ничего не знают о работах своих предшественников. Таким образом, можно указать около 200 проверок корректности тех или иных существующих моделей велосипеда. Большинство этих проверок было сделано в работах Хэнда и авторов данной статьи. Выводы, представленные

ниже, базируются на наших собственных результатах [50, 52, 71], а также на результатах шести авторов, названных ниже, среди которых выделяется Хэнд.

Корректные уравнения для модели Уиппла были получены Дёрингом [19, 20] на основе упрощенной модели Карвалло, описанной Клейном и Зоммерфельдом [37]. Также корректные уравнения для модели Уиппла были получены Вейром [84], который проверял результаты Шарпа [73], Итоном [21], который проверял результаты Вейра [84] и Шарпа [73], Хэндом [27], который проверял результаты всех перечисленных авторов и многих других, а также Мирсом [48], который проверял работы Вейра и Хэнда. Синг и Гоел [76] использовали в своем исследовании корректные уравнения, полученные Дёрингом, но мы не смогли получить характеристические значения на основе этих уравнений. Авторы работы [2] исправляют ошибку, допущенную Неймарком и Фуфаевым [6] и независимо исправленную Хэндом. Мы не нашли ошибок в работе [2], однако полученные в ней уравнения не совпадают с нашими. Основываясь на схожести графиков полученных нами численно зависимостей основных переменных от времени и соответствующих графиков из работы Псиаки [55], мы заключаем, что построенные в его работе весьма сложные уравнения, по-видимому, являются правильными, хотя и в данном случае нам не удалось установить их формальную эквивалентность нашим уравнениям.

Уравнения движения моделей подобного типа были представлены в работах Карвалло [15], который слегка упростил их, Уиппла [86], в работе которого имеется ряд типографских ошибок, Клейна и Зоммерфельда [37], которые, следуя работе Карвалло, слегка упростили полученные ими уравнения, а также в работе Херфкенса [28], также не избежавшей типографских ошибок. Недавно нам удалось обнаружить отчет Маннинга [46], в котором на первый взгляд нет никаких очевидных недостатков, однако мы еще не проводили детальной проверки этого отчета. Работа Шарпа [73] является полностью правильной до того момента, пока он не рассматривает в своей модели упругую податливость шин. Модель, предложенная им, должна скорее служить основанием для исследования движения велосипеда с упругими колесами. Ван Зитфельд [82] получил слегка неправильные уравнения движения, однако они становятся правильными в предположениях, которым удовлетворяет модель Уиппла. Вейр и Целлнер [85] ошиблись в знаке. Неймарк и Фуфаев [6] допустили более значительные ошибки, которые, однако, были исправлены последователями [2, 27].

Среди работ других специалистов, занимавшихся динамикой велосипеда, следует упомянуть [4, 7, 16, 23, 38, 43, 44, 57–62, 75, 77]. В последнее время появились еще две многообещающие работы [24, 39]. Несмотря на десятилетия интенсивной и тщательной работы, описанной в этом обзоре, так и не появилось статьи на английском языке, где были бы получены полные и корректные уравнения для модели Уиппла велосипеда, катящегося по плоскости. Цель данной работы состоит в том, чтобы заполнить этот пробел.

3. Модель велосипеда

В нашей работе мы будем использовать модель велосипеда, предложенную в работе Уиппла [86]. Данная модель состоит из четырех твердых тел: заднего колеса R , задней части рамы велосипеда вместе с сидящим велосипедистом B , передней части рамы H , состоящей из руля и передней вилки, соединенной с передним колесом F . С учетом продольной (лево-право) симметрии системы и круговой симметрии колес, форма и распределение масс в системе произвольны, однако здесь следует сделать одно замечание. Модель, которая обладает перечисленными выше симметриями, может иметь и не плоские (толстые) колеса. Мы допускаем возможность такой толщины при описании свойств инерции системы (то

есть при описании распределения масс в ней), однако, как и Уиппл, рассматриваем случай бесконечно тонких колес, контакт которых с плоскостью всегда происходит в одной точке. Тем самым мы исключаем из рассмотрения, например, случай тороидальных колес. Считаем, что велосипедист неподвижен относительно рамы велосипеда, пренебрегаем трением в узлах конструкции и упругими свойствами колес.

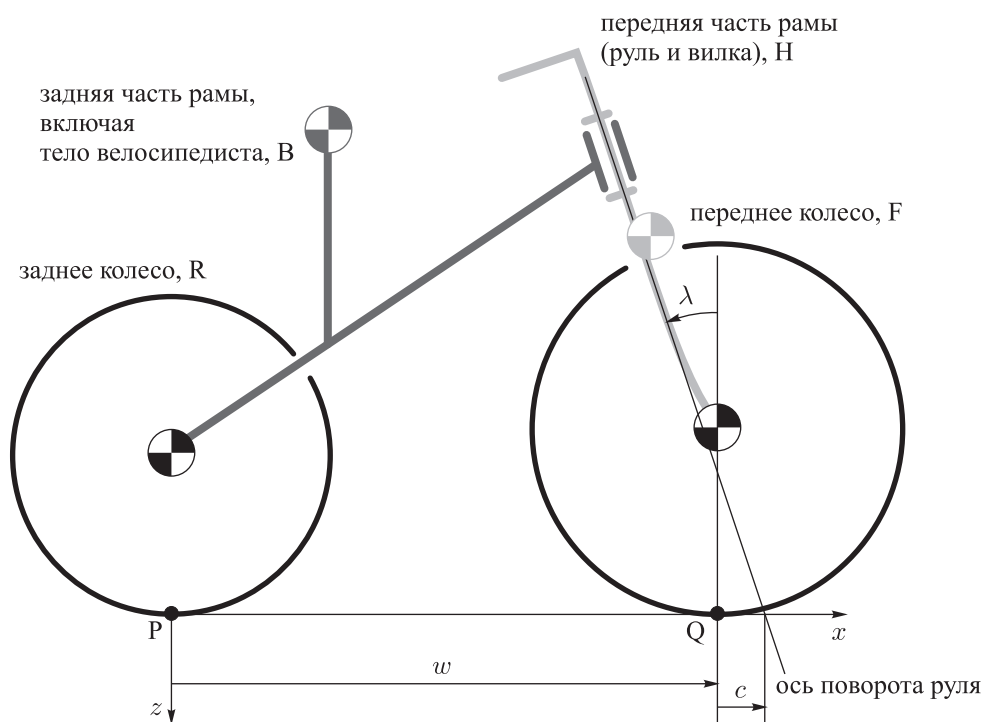


Рис. 1. Параметры модели велосипеда. Для всех четырех частей, составляющих велосипед (R, B, F и H), положение их центров масс выражено с помощью x - и z -координат (в системе координат с началом в точке P и осью y , направленной на читателя) в той конфигурации велосипеда, которая изображена на рисунке. Остальные параметры, такие как массы и моменты инерции тел, радиусы колес, наклон λ оси поворота руля, база колес w и вынос передней вилки c , перечислены в таблице 1. На рисунке соблюдается масштаб для расстояний, перечисленных в таблице 1. Переменные, определяющие конфигурацию модели, описаны на рисунке 2.

Схема модели составляется не за счет выбора наиболее важных аспектов, описывающих поведение реального велосипеда. Для понимания основных особенностей активного управления велосипедом со стороны велосипедиста нет необходимости и нецелесообразно использовать слишком сложную модель. Например, некоторые аспекты, учтенные в модели, на самом деле имеют очень малое влияние на движение. К таковым относится, например, произвольное распределение массы колес. С другой стороны, в модели не учитываются аспекты, играющие на практике весьма существенную роль — например, упругость тела велосипедиста и задержки в управлении, вызванные рефлексом велосипедиста. Даже для изучения устойчивости движения неуправляемого велосипеда кажется необходимым учитывать деформируемость шин и податливость рамы, чтобы описать высокочастотные колебания переднего колеса. Таким образом, представленная модель учитывает все грубые твердотельные эффекты, оставляя без внимания множество аспектов, требующих более сложной и, следовательно, менее понятной модели.

Таблица 1. Значения параметров для тестовой модели велосипеда, показанной на рисунке 1 и обсуждаемой в тексте работы. Все величины, данные в таблице, являются точными (не округленными). Компоненты тензора инерции и углы подобраны так, чтобы собственные значения матрицы инерции не имели слишком много знаков после запятой. Тангенсы углов, которые собственные векторы матрицы инерции образуют с осями неподвижной системы координат, являются рациональными выражениями

наименование параметра	обозначение параметра	величина параметра в тестовой модели
база колес	w	1.02 м
вынос вилки	c	0.08 м
наклон оси поворота руля	λ	$\pi/10$ рад ($90^\circ - 72^\circ$)
постоянная силы тяжести	g	9.81 Н/кг
скорость движения вперед	v	см. таблицу 2
Заднее колесо (R):		
радиус	r_R	0.3 м
масса	m_R	2 кг
моменты инерции	(I_{Rxx}, I_{Ryy})	(0.0603, 0.12) кг м ²
Задний узел (B):		
положение центра масс	(x_B, z_B)	(0.3, -0.9) м
масса	m_B	85 кг
моменты инерции	$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bxz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.2 & 0 & 2.4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2.4 & 0 & 2.8 \end{bmatrix}$ кг м ²
Передний узел H (руль и вилка):		
положение центра масс	(x_H, z_H)	(0.9, -0.7) м
масса	m_H	4 кг
моменты инерции	$\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hy y} & 0 \\ I_{Hxz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.05892 & 0 & -0.00756 \\ 0 & 0.06 & 0 \\ -0.00756 & 0 & 0.00708 \end{bmatrix}$ кг м ²
Переднее колесо (F):		
радиус	r_F	0.35 м
масса	m_F	3 кг
моменты инерции	(I_{Fxx}, I_{Fyy})	(0.1405, 0.28) кг м ²

Конструкцию нашего велосипеда полностью характеризуют 25 параметров, описанные ниже. В таблице 1 перечислены значения этих параметров, использовавшиеся в численных экспериментах. Большинство значений параметров соответствует реальным велосипедам, но некоторые величины (например, моменты инерции заднего колеса, представленные соотношением $I_{Rxx} > I_{Ryy}/2$) специально увеличены, чтобы гарантировать их влияние в численном эксперименте. Все параметры велосипеда вычислены в случае, когда плоскость рамы строго перпендикулярна опорной плоскости, оба колеса опираются о плоскость и угол поворота переднего колеса — нулевой. Начало подвижной системы координат выбрано в точке P

касания заднего колеса с опорной плоскостью. Используя договоренности, принятые в динамике колесных экипажей [65], положительное направление оси X выберем из точки P в точку касания переднего колеса с плоскостью, ось z направлена вертикально вниз, а ось y направлена вправо от велосипедиста.

Обозначим радиусы колес r_F и r_R . Массы колес обозначим m_F и m_R и будем считать, что центр масс каждого колеса расположен в его геометрическом центре. Моменты инерции заднего и переднего колеса относительно оси, перпендикулярной плоскости колеса и проходящей через его центр, равны I_{Ryy} и I_{Fyy} соответственно. Моменты инерции колес относительно любого диаметра в плоскости xz равны I_{Rxx} и I_{Fxx} . Распределение масс колеса не обязательно является плоским, поэтому моменты инерции удовлетворяют неравенствам $I_{Ryy} \leq 2I_{Rxx}$ и $I_{Fyy} \leq 2I_{Fxx}$. Все параметры переднего колеса отличаются от соответствующих параметров заднего колеса, и, следовательно, можно изучать отдельно важность влияния на движение кинетического момента переднего и заднего колес.

Узкие, сильно накачанные и обладающие значительным коэффициентом трения с опорной плоскостью шины моделируются условиями отсутствия скольжения той точки колеса, которая в данный момент оказалась в соприкосновении с опорной плоскостью. Оси, на которых колеса вращаются без трения, перпендикулярны плоскости симметрии каждого из колес и проходят через их центры. В системе координат, введенной выше, точка Q касания переднего колеса с плоскостью движения расположена на расстоянии w (которое называется базой колес) впереди точки P . Точка Q расположена на расстоянии c позади точки, в которой продолжение оси поворота переднего колеса и руля пересекает опорную плоскость. Хотя для большинства велосипедов принято считать, что $c > 0$, уравнения движения, тем не менее, позволяют рассмотреть и ситуацию $c < 0$.

Заднее колесо R связано с задней частью B рамы велосипеда (которая включает в себя также и тело велосипедиста) по оси заднего колеса. Масса части B равна m_B , а ее центр масс расположен в точке B , имеющей относительно введенной системы координат координаты $(x_B, y_B = 0, z_B < 0)$. Моменты инерции задней части рамы относительно ее центра масс являются компонентами матрицы инерции размера 3×3 , где распределение масс симметрично относительно плоскости xz , но не обязательно целиком лежит в этой плоскости. Центр масс передней части рамы (переднего узла — вилки и руля) H расположен в точке с координатами $(x_H, y_H = 0, z_H < 0)$ относительно системы координат с началом в точке P . Передняя часть рамы H имеет массу m_H . Так же, как и для задней части рамы B , для передней части H момент инерции I_{Hyy} может быть меньше, чем $I_{Hxx} + I_{Hzz}$. Соответствующие матрицы, определяющие распределение масс, имеют вид:

$$\mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bxz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hxz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

В физически допустимой ситуации (то есть без отрицательных масс) матрица моментов инерции должна иметь три положительных собственных значения (главных момента инерции), удовлетворяющих неравенству треугольника (сумма любых двух из трех этих величин должна быть больше третьей). Угол наклона λ оси поворота руля и переднего колеса отклоняется от вертикали по часовой стрелке так, как показано на рисунке, причем λ изменяется в пределах $-\pi/2 < \lambda < \pi/2$ (все углы измеряются в радианах). Наклон оси поворота руля определяется как $\pi/2$ минус соответствующий угол, называемый обычно

углом наклона рулевой трубы: велосипед с углом наклона рулевой трубы в 72° имеет $\lambda = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ = \pi/10$. Положение оси поворота руля неявно определяется базой колес w , выносом вилки s и углом λ наклона этой оси.

Двумя параметрами, не относящимися к конструкции велосипеда, будут ускорение свободного падения g и номинальная скорость прямолинейного движения v . Эта модель, или ее упрощения, обычно являются наиболее распространенной идеализацией велосипеда (см. электронный вспомогательный материал, часть 1). Модели мотоциклов часто основываются на обобщении этой модели, в котором колеса считаются тороидальными, шины упругими и движущимися по опорной плоскости с проскальзыванием. Рама также не является абсолютно твердым телом в моделях мотоциклов. Теория управления велосипедом и мотоциклом часто базируется на моделях, получающихся упрощением нашей модели или на анализе простых аналогичных систем, к которым не сводится предложенная нами.

(а) *Сколькими параметрами описывается модель велосипеда?*

Описанная здесь модель велосипеда полностью определяется при помощи 25 параметров, перечисленных выше. Однако это число параметров не является минимальным. Например, инерционные свойства заднего колеса R за исключением осевого момента инерции (то есть m_R и I_{Rxx} , но не I_{Ryy}) могут быть учтены в распределении масс задней части B рамы велосипеда, тем самым число параметров может быть уменьшено на 2. Та же идея применима к переднему колесу и к передней части рамы велосипеда; параметров остается $25 - 2 - 2 = 21$. Осевой момент инерции каждого колеса может быть заменен при помощи постоянного гиросtatического момента, связывающего угловую скорость вращения колеса с прямолинейной скоростью v движения велосипеда. В нелинейной модели эти соображения не уменьшают общего числа параметров, но в линейной модели, в которой радиусы колес не влияют на геометрию наклона и поворота велосипеда, их вклад в кинетический момент может быть учтен, если ввести постоянный гиросtatический момент. Исключая из рассмотрения радиусы колес, убеждаемся, что общее число параметров, описывающих систему, сократилось до $21 - 2 = 19$. Наконец, в линеаризованных уравнениях движения несущественными являются осевые моменты инерции (моменты инерции с индексами yy), что сокращает общее число параметров еще на два: $19 - 2 = 17$.

В максимально упрощенной форме линеаризованные уравнения движения (5.3) имеют 11 произвольных независимых матричных компонент. Каждая из этих компонент является сложной комбинацией описанных выше 17 параметров. Кроме того, дальнейшее упрощение может быть получено после изучения характеристического уравнения четвертого порядка (6.5): после деления на коэффициент $\det(\mathbf{M})$, стоящий при старшем члене этого уравнения, в нем остается 4 коэффициента, каждый из которых является многочленом относительно скорости v прямолинейного движения велосипеда. В этих многочленах имеется всего 7 независимых коэффициентов. Подходящим выбором масштаба длины и времени можно исключить два из них. Таким образом, пространство положений корней характеристического уравнения является всего лишь пятимерным. Однако мы будем использовать все 25 введенных параметров, чтобы не связываться с громоздкими формулами, выражающими одни параметры через другие.

(б) *Сколько степеней свободы имеет данная модель велосипеда?*

Поскольку данная система обладает неголономными кинематическими связями, вопрос о числе ее степеней свободы нуждается в отдельном обсуждении. Голономные связи (шарнирные соединения и условия безотрывного движения по плоскости) и неголономные связи

(условия отсутствия проскальзывания в точках соприкосновения велосипеда с плоскостью) органичивают движение этого составленного из четырех частей объекта следующим образом. Начнем с того, что в общем случае система четырех тел, способных свободно двигаться независимо друг от друга, имеет $4 \times (3 + 3) = 24$ степени свободы (для каждого тела имеются три поступательные и три вращательные степени свободы). Затем, вычитая из этого числа по 5 степеней свободы для каждого из трех шарниров, получим $24 - 5 \times 3 = 9$. Вычитая еще две связи, выражающие условие безотрывного движения по плоскости для каждого из колес, находим: $9 - 2 = 7$. Таким образом, если не рассматривать дополнительные наложенные на систему неголономные связи, то ее пространство возможных положений является семимерным. Четыре неголономные связи, выражающие отсутствие проскальзывания колеса в точке его контакта с опорной плоскостью (по две для каждого колеса), не накладывают дальнейших ограничений на данное семимерное пространство всех возможных конфигураций: кинематически допустимые неголономными связями движения позволяют перевести велосипед из любого положения на плоскости в любое и задать ему в конечном положении любую наперед заданную ориентацию, включая углы, определяющие вращение колес. Например, даже несмотря на то, что колеса велосипеда не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном плоскости колеса, его боковое движение возможно и достигается путем осуществления движений, аналогичных параллельной парковке автомобиля. Итак, окончательно, пространство допустимых конфигураций велосипеда является семимерным.

(b1) *Описание семимерного конфигурационного пространства*

Определенное выше семимерное пространство возможных положений велосипеда может быть параметризовано следующим образом. Положение точки касания заднего колеса велосипеда с плоскостью определяется координатами (x_R, y_R) точки касания относительно абсолютной неподвижной системы координат $Oxyz$ с началом в некоторой точке O плоскости. Ориентация задней части рамы по отношению к абсолютной неподвижной системе координат $Oxyz$ определяется последовательностью из трех поворотов (углы Эйлера 312). Эти вращения показаны на рисунке 2 вместе с воображаемыми шарнирами, представленными объектами цилиндрической формы и присоединенными к втулке заднего колеса: угол рысканья (то есть угол поворота в поперечном направлении) ψ вокруг оси z , угол наклона ϕ относительно оси x и угол тангажа (то есть угол поворота относительно оси y), обозначенный θ_B . Заметим, что угол тангажа θ_B не является одной из семи переменных, описывающих конфигурацию системы, поскольку он выражается через остальные переменные при помощи тригонометрического соотношения третьего порядка, выражающего то условие, что при движении велосипеда точки касания колес всегда лежат в одной плоскости — плоскости движения. Угол δ определяет поворот передней части рамы (руля и вилки) относительно задней, причем это вращение происходит вокруг оси поворота руля. При правом повороте движущегося вперед велосипеда считается $\delta > 0$. Наконец, вращение заднего колеса R и переднего колеса F относительно задней и передней частей рамы B и H определяется углами θ_R и θ_F соответственно. Таким образом, конфигурационное пространство параметризовано переменными $(x_R, y_R, \psi, \phi, \delta, \theta_R, \theta_F)$. Другие величины, такие как координаты центров колес или угол тангажа θ_B задней части рамы относительно абсолютной системы координат, выражаются через эти семь переменных.

(b2) *Степени свободы по скоростям (за счет неголономных связей)*

Как объяснялось ранее, пространство допустимых конфигураций велосипеда является семимерным. Однако четыре неголономные связи (по две для каждого колеса; одна характе-

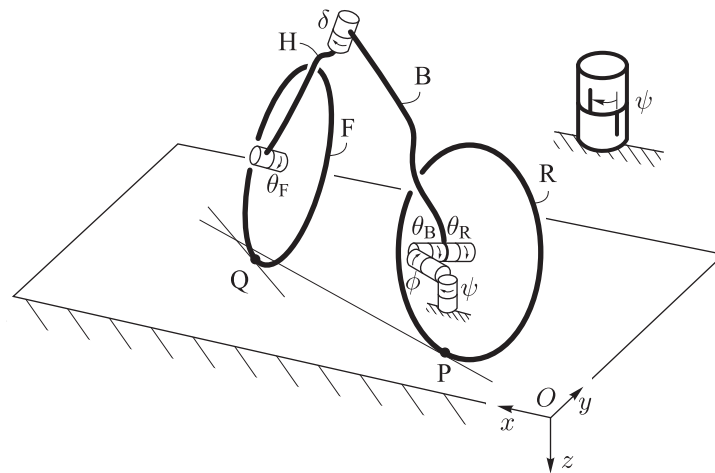


Рис. 2. Конфигурационные и динамические переменные. Семимерное пространство допустимых положений велосипеда параметризовано здесь координатами x и y точки контакта P заднего колеса с плоскостью движения, вычисляемыми относительно неподвижной системы координат $Oxyz$, и пятью углами, представленными последовательностью шарниров. Шарниры изображены в виде пары цилиндров, которые вращаются один относительно другого. Положительное направление вращения цилиндра происходит по стрелке, нарисованной на нем, как показано на увеличенном изображении одного из цилиндров (в верхнем правом углу рисунка). Поворот на угол ψ отвечает за ориентацию велосипеда, а не за его положение. Например, поворот по часовой стрелке (если смотреть сверху вниз) на курсовой угол ψ задней части рамы является положительным. Угол ϕ отвечает за наклон велосипеда. Положительное изменение этого угла отвечает наклону велосипеда вправо, если смотреть по направлению движения. Угол вращения заднего колеса относительно задней части рамы обозначен θ_R : его положительное изменение соответствует движению велосипеда назад. Угол δ описывает поворот руля. Поворот руля вправо соответствует положительному изменению угла δ . Угол вращения переднего колеса обозначим θ_F . На рисунке изображено положение, когда углы ψ , ϕ и δ — положительные. Степени свободы по скоростям описываются с помощью $\dot{\phi}$, $\dot{\delta}$ и $\dot{\theta}_R$. Знаки выбраны в соответствии с договоренностями, принятыми в прикладном стандарте динамики экипажей [65].

ризует отсутствие проскальзывания колеса на плоскости в продольном направлении, а другая — в поперечном) приводят данное семимерное пространство к $7 - 4 = 3$ степеням свободы. Это трехмерное кинематически допустимое пространство скоростей может быть параметризовано скоростью $\dot{\phi}$ наклона задней части рамы, скоростью $\dot{\delta}$ угла поворота передней части рамы и угловой скоростью $\dot{\theta}_R$ заднего колеса R относительно задней части рамы B .

4. Основные особенности модели: уравнения и их решение

(а) *Поведение системы является однозначным*

Динамические уравнения данной модели велосипеда следуют из теорем об изменении импульса и кинетического момента, приложенных к каждой из частей, составляющих модель, в предположении, что реакции кинематических связей являются идеальными, то есть силы реакции не производят работы. Эти уравнения могут быть приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциально-алгебраических уравнений разными способами. Можно составлять эти уравнения методом Ньютона при помощи общих теорем динамики, можно использовать уравнения Лагранжа первого рода с неопределенными множителями, а можно использовать другие уравнения, основанные на принципе

виртуальных скоростей, такие, например, как уравнения Кейна. Данный аспект механики является достаточно хорошо определенным, поскольку нам известно, что все перечисленные методы дают эквивалентные наборы уравнений движения велосипеда. Поэтому любое заданное и согласованное со связями начальное положение (положения и скорости всех точек на раме и колесах) всегда достигается одной и той же последовательностью движений частей велосипеда. Таким образом, если выбор обобщенных координат для описания задачи и их замена в уравнениях движения могут изменить вид этих уравнений, то любые различия, возникающие в динамике системы (в описании того, как именно движется система), могут быть вызваны только наличием ошибок.

(b) Система является консервативной, но не является гамильтоновой

Единственной силой трения, имеющей место в данной системе, является сила реакции, приложенная в точках соприкосновения велосипеда с плоскостью движения. Однако, благодаря условиям качения без проскальзывания (связям), эта сила трения моделируется силами реакции, не носящими диссипативный характер. Кроме того, ни силы реакции в шарнирах, ни силы реакции, приложенные в точках контакта, не производят работы. Таким образом, при изучении неуправляемого движения велосипеда единственной активной силой является сила тяжести, приложенная к каждой из частей конструкции. В системе нет диссипативных сил, а следовательно, она является консервативной, сохраняющей полную энергию: сумма потенциальной энергии силы тяжести и кинетической энергии должна быть постоянной на любом движении системы. Однако наличие неголономных связей в системе препятствует записи ее уравнений движения в стандартной гамильтоновой форме, поэтому теоремы гамильтоновой механики оказываются неприменимы в данном случае. Отсюда следует, например, вывод, кажущийся удивительным для тех, кто воспитывался на примерах из гамильтоновой механики: система, не обладающая диссипацией, может обладать асимптотической (экспоненциальной) устойчивостью. Это несомненное отличие от выводов (представляемых соответствующими теоремами) об устойчивости движения в гамильтоновых системах объясняется тем, что данная модель велосипеда, несмотря на ее консервативность, все же, в силу наличия неголономных связей, не является гамильтоновой. К системам подобного типа можно отнести задачу о неуправляемом движении скейтборда (в которой прямолинейное движение скейтборда может быть асимптотически устойчивым, см. [31]) и классическую задачу о движении саней Чаплыгина (см., например, [64]).

(c) Симметрии в решении

Даже не записывая в явном виде уравнения движения, можно отметить некоторые особенности их решения, возникающие за счет наличия симметрий в системе.

(c1) Игнорируемые координаты

Некоторые из переменных, описывающих конфигурацию системы, не входят ни в одно выражение для сил, моментов, потенциальных и кинетических энергий частей, составляющих велосипед. Этими (так называемыми циклическими, или игнорируемыми) координатами являются координаты x_R , y_R точки касания заднего колеса велосипеда с плоскостью, курсовой угол ψ , а также углы (θ_R, θ_F) , определяющие вращение соответствующего колеса относительно задней и передней частей рамы. Таким образом, можно исключить циклические координаты из уравнений движения и записать эти уравнения уже в редуцированной

форме. Закон изменения этих переменных со временем может быть найден путем интегрирования уравнений кинематических связей, о чем подробно написано в конце дополнения В. Циклические координаты не могут обладать асимптотической устойчивостью: малое возмущение, например, курсового угла ψ приведет к изменению первоначального направления движения.

(с2) *Динамика боковых движений может рассматриваться независимо от динамики прямолинейного движения*

В силу симметричности конструкции велосипеда относительно продольной оси из уравнений движения должно следовать, что они всегда имеют решение с $\delta = 0$, $\phi = 0$ и любой постоянной скоростью v — положительной (соответствующей движению велосипеда вперед) или отрицательной (соответствующей движению назад). Более того, вследствие наличия таких симметричных решений прямолинейное и боковое движение в линейном приближении могут рассматриваться независимо друг от друга. Это может быть обосновано путем следующих рассуждений. Благодаря симметрии относительно продольной оси возмущение скорости за счет наклона вправо вызывает такой же эффект, как и возмущение скорости при наклоне влево. Однако в линейном приближении эти возмущения компенсируют друг друга. Поэтому уравнение, описывающее изменение скорости, не будет содержать линейных членов, возникающих за счет наклона велосипеда. Аналогично, изменение скорости прямолинейного движения не может вызвать наклон. Следовательно, в линеаризованных уравнениях движения прямолинейное движение может рассматриваться независимо от бокового движения; движущийся с постоянной скоростью велосипед имеет линеаризованные уравнения бокового движения такие же, как и велосипед, движущийся с переменной скоростью (но постоянной энергией в силу консервативности системы). Эти соображения детально обсуждаются в электронном дополнительном материале, см. дополнение 4.

(с3) *Продольное движение неуправляемого велосипеда не может быть асимптотически устойчивым*

Для любой системы твердых тел, на которую наложены идеальные кинематические связи и силы, зависящие только от положения, для любого решения $\mathbf{q}(t)$, будет решением также и $\mathbf{q}(-t)$. Другими словами, уравнения движения велосипеда должны допускать также и решение, при котором велосипед движется назад, причем скорости всех точек конструкции должны изменяться одинаково при движении вперед и назад. Иначе говоря, велосипед, который имеет асимптотически устойчивое прямолинейное движение вперед (со скоростью $v > 0$), должен иметь экспоненциально неустойчивое прямолинейное движение назад ($v < 0$). Рассмотрим велосипед, обладающий симметрией распределения масс у передней и задней части рамы. Такой велосипед имеет вертикальную центральную поворотную ось (или горизонтальную поворотную ось), а распределение масс у передней части рамы (включающей в себя передний узел — руль, вилку и переднее колесо) является таким же, как у задней части рамы. Если такой велосипед имеет экспоненциально затухающее решение в одном направлении, он должен иметь экспоненциально растущее решение в противоположном направлении в силу обратимости системы по времени. Опять-таки в силу симметрии, велосипед должен тогда иметь экспоненциально растущее решение в исходном направлении, которое предполагалось асимптотически устойчивым. Таким образом, модель велосипеда с симметричным распределением масс не может иметь экспоненциально затухающее решение в одном направлении без того, чтобы иметь экспоненциально растущее решение в том же направлении, и, следовательно, не может быть асимптотически устойчивой.

Однако для данной модели велосипеда может иметь место обычная (не асимптотическая) устойчивость, подобная устойчивости гамильтоновых систем.

(d) *Нелинейные уравнения не имеют простой формы записи*

В противоположность достаточно простым линейным уравнениям модели велосипеда, представленным ниже (см. (5.3)), компактная запись полных нелинейных уравнений движения велосипеда представляется невозможной. Кинематический цикл от точки контакта заднего колеса до точки контакта переднего колеса с плоскостью движения определяет угол θ_H с помощью сложного уравнения, которое можно представить как полиномиальное уравнение четвертого порядка. Поэтому простого выражения θ_H через другие переменные задачи не существует для больших углов наклона велосипеда и поворота руля. Таким образом, запись полных нелинейных уравнений движения велосипеда в стандартной форме, которую различные исследователи могли бы использовать для сравнения с полученными ими альтернативными вариантами записи этих уравнений, представляет собой сложную задачу, которая не рассматривается в данном исследовании и, по-видимому, никогда не может быть разрешена. Однако если рассматривается набор уравнений движения отдельно для каждой из частей, составляющих велосипед, и набор связей, описывающих то, как эти части соединены друг с другом, то можно получить большое число сравнительно простых уравнений. Алгоритмический вывод нелинейных уравнений движения, использовавший такой подход и удобный для численного анализа, был представлен в работе [8], в которой был исследован полный набор круговых движений на велосипеде при езде «без рук» (то есть движений, в которых велосипед совершает движение по окружности, а велосипедист при этом не касается руками руля).

5. Линеаризованные уравнения движения

В этом параграфе мы выписываем набор линеаризованных дифференциальных уравнений движения рассматриваемой нами модели велосипеда. Уравнения линеаризованы в окрестности прямолинейного равномерного движения вертикально расположенного велосипеда. При составлении этих уравнений мы добавили в их правые части управляющие моменты для наклона велосипеда и поворота руля. Эти моменты считаются равными нулю при исследовании неуправляемого движения.

(a) *Вывод уравнений движения*

Наиболее корректный вывод и представление уравнений движения для относительно общей модели велосипеда, хотя и не обязательно представленных в канонической форме (5.3) можно найти в работах [15, 19–21, 28, 37, 73, 82, 84, 86]. Авторы работы [2] получили уравнения движения велосипеда, по форме аналогичные (5.3), занимаясь исправлением ошибок, допущенных в работе Неймарка и Фуфаева [6], так же, как и Хэнд [27], немного опередивший Мирса [48]. Пападопулос [52] и Мейярд [50] также выводили эти уравнения, и их выводы привели к созданию данной работы.

Все упоминавшиеся выше выводы являются достаточно длинными и приводят к уравнениям, содержащим целые группы вложенных обозначений. Это одна из причин, по которым в некоторых работах проверялись уравнения, выведенные в других работах. Вывод уравнений, содержащий минимальное количество выкладок и использующий закон изменения

кинетического момента системы в проекции на различные оси, основанный на результатах работы [52], содержится в дополнении В. Заметим, что этот вывод уравнений, равно как и все другие выводы линеаризованных уравнений движения, имеющиеся в литературе, не основан на систематической линеаризации полных нелинейных дифференциальных уравнений движения велосипеда. До сих пор при систематической линеаризации полных уравнений не удается получить аналитических выражений для коэффициентов линеаризованных уравнений через введенные выше 25 параметров велосипеда. Однако часть процесса проверки, описанная ниже, включает сравнение с численным исследованием полных нелинейных уравнений и сравнение с числовыми значениями коэффициентов линеаризованных уравнений, определяемых при анализе нелинейных уравнений.

(b) *Обобщенные силы*

Для численного исследования тестовой модели, когда вычисление характеристических значений играет основную роль, мы пренебрегаем управляющими силами или другим силовым воздействием (за исключением силы тяжести, которая всегда включается в уравнения). Однако обобщенные силы позволяют упорядочить получение уравнений. Более того, обобщенные силы нужны для изучения возмущений и управления велосипедом со стороны велосипедиста.

В добавление к силам тяжести, рассмотрим произвольное распределение сил \mathbf{F}_i , действующих в различных точках велосипеда. Их результирующий эффект вносит вклад как в силы реакции (реакции опорной плоскости и реакции, действующие в шарнирах, соединяющих отдельные части велосипеда), так и в ускорения $(\ddot{\phi}, \ddot{\delta}, \ddot{\theta}_R)$. Три обобщенные силы могут быть найдены при помощи записи работы приложенных сил, связанной с произвольными возмущениями скоростей, которые согласуются со связями, заданными шарнирами, и связями, выражающими условия качения без проскальзывания. Эта «виртуальная» работа необходимо приводится к сумме трех слагаемых

$$P = \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{v}_i = T_\phi \Delta \dot{\phi} + T_\delta \Delta \dot{\delta} + T_{\theta_R} \Delta \dot{\theta}_R, \quad (5.1)$$

поскольку возмущения скоростей \mathbf{v}_i всех материальных точек обязательно являются линейными комбинациями возмущений обобщенных скоростей $(\Delta \dot{\phi}, \Delta \dot{\delta}, \Delta \dot{\theta}_R)$. Обобщенные силы $(T_\phi, T_\delta, T_{\theta_R})$ будут линейными комбинациями компонент различных сил, входящих в силовое поле \mathbf{F}_i .

Обобщенные силы $(T_\phi, T_\delta, T_{\theta_R})$ энергетически сопряжены с обобщенными скоростями. Обобщенные силы можно представить себе при рассмотрении специальных нагрузок, которые дают вклад лишь в одну обобщенную силу, когда велосипед находится в исходном положении. Рассуждая так, приходим к следующим выводам:

- (1) T_{θ_R} является продвигающей (проталкивающей) «силой», выраженной как момент, приложенный к заднему колесу. На практике крутящий момент от педалей или толчок велосипеда в переднем направлении дает вклад в T_{θ_R} , но не в T_ϕ и T_δ .
- (2) T_ϕ — момент сил, наклоняющий велосипед вправо и полученный суммированием всех сил, приложенных к велосипеду относительно оси, проходящей через точки касания колес с опорной плоскостью. Сила, перпендикулярная задней части рамы и расположенная непосредственно над точкой касания заднего колеса, вносит вклад только в T_ϕ . Боковой порыв ветра или родители, поддерживающие вертикально велосипед начинающего велосипедиста, вносят вклад только в T_ϕ .

- (3) T_δ — момент действия/противодействия, приложенный к переднему колесу. Это момент, вызывающий поворот переднего узла (руля и вилки) H по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси поворота руля, направленной к опорной плоскости. Этот момент вызывает также равный по величине и противоположно направленный момент силы реакции, вносящий вклад только в T_δ . При простом моделировании T_δ — это момент, который велосипедист прикладывает к рулю. Точное описание того, какой вклад обобщенные силы вносят в T_δ , зависит от неявных проекций, входящих в уравнение (5.1). Некоторые силы не имеют вклада в T_δ , а именно те, которые действуют в тех точках любой из двух частей рамы (передней или задней части), которые остаются неподвижными, когда u находится в покое вертикально расположенного велосипеда поворачивают переднее колесо, но не наклоняют его. Боковые силы, приложенные к переднему колесу непосредственно над задней точкой контакта, не вносят вклад в T_δ . Никакого вклада в T_δ не вносят также силы, действующие по линии, соединяющей переднюю точку контакта с точкой, в которой поворотная ось пересекается с вертикальной прямой, проходящей через точку контакта заднего колеса. Боковые силы в плоскости движения, не проходящие через описанные выше линии, вносят вклад только в T_δ . Боковые силы, действующие в точках контакта, не вносят вклад ни в одну из трех обобщенных сил T_ϕ , T_δ , T_{θ_R} .

Как и в случае маятника, конечные вертикальные силы (дополнительные к силе тяжести) изменяют коэффициенты линеаризованных уравнений движения, но не вносят вклад в обобщенные силы (например, магнит, положенный под маятником, изменяет величину g в уравнении $\ddot{\theta} + (g/l)\theta = 0$, но не изменяет 0 в правой части этого уравнения). Аналогично, проталкивающие силы также изменяют коэффициенты, но не вносят вклад в линеаризованные уравнения бокового движения. Таким образом, уравнения, представленные здесь, применимы только при малых ($\ll \sum mg$) продвигающих силах и при малых дополнительных вертикальных силах.

(с) *Первое линейное уравнение: внешние силы отсутствуют, скорость постоянна*

Как у линеаризованных уравнений, так и у полных уравнений движения модели имеется решение с $\delta = 0$, $\phi = 0$ (угол поворота руля равен нулю и плоскость велосипеда вертикальна) и произвольной постоянной скоростью прямолинейного движения $v = -\dot{\theta}_R r_R$. Уравнения движения, представленные здесь, описывают эволюцию малых отклонений от этого невозмущенного решения. Как объяснялось выше и как объясняется в электронном дополнительном материале, боковая симметрия системы, учитываемая совместно с линеаризацией уравнений, не дает в первом приближении взаимосвязи между прямолинейным движением и наклоном и поворотом руля. Поэтому первое линеаризованное уравнение движения легко получается из рассмотрения двумерной задачи в виде:

$$\left[r_R^2 m_T + I_{Ryy} + \left(\frac{r_R}{r_F} \right)^2 I_{Fyy} \right] \ddot{\theta}_R = T_{\theta_R}, \quad (5.2)$$

где m_T — полная масса велосипеда (см. дополнение А). Если движение происходит в отсутствие проталкивающих сил, то номинальная скорость прямолинейного движения $v = -\dot{\theta}_R r_R$ постоянна (в первом порядке малости).

(d) Линеаризованные уравнения наклона и поворота руля

Линеаризованные уравнения движения для двух оставшихся степеней свободы, для угла наклона ϕ и угла поворота руля δ , имеют вид двух связанных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Любая система таких уравнений их линейной комбинацией может быть приведена к эквивалентному набору уравнений. Ниже мы определяем каноническую форму этих линейных уравнений как форму, у которой в правой части первого уравнения стоит только T_ϕ , а у второго уравнения — только T_δ . Первое из этих двух уравнений — это уравнение наклона, а второе — уравнение поворота. Линеаризованные уравнения движения механической системы можно записать в виде $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}$. Для модели велосипеда эти уравнения в работе [52] были выписаны с выделением множителей при скорости и силе тяжести:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + v\mathbf{C}_1\dot{\mathbf{q}} + [g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2]\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (5.3)$$

где переменными, изменяющимися во времени, являются $\mathbf{q} = [\phi, \delta]^T$ и $\mathbf{f} = [T_\phi, T_\delta]^T$. Постоянные элементы матриц \mathbf{M} , \mathbf{C}_1 , \mathbf{K}_0 и \mathbf{K}_2 определяются через 25 параметров конструкции велосипеда в дополнении А. Если описать здесь кратко все слагаемые, то \mathbf{M} — симметричная матрица масс, определяющая кинетическую энергию системы при нулевой скорости прямолинейного движения в виде $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}/2$. Матрица $\mathbf{C} = v\mathbf{C}_1$, определяющая эффекты, сходные с демпфированием (в действительности никакого демпфирования нет), является линейной по скорости v и учитывает кососимметричные гироскопические эффекты, возникающие за счет скорости наклона и скорости поворота руля. В \mathbf{C}_1 также учитываются инерциальные реакции из-за скорости поворота руля: часть от бокового ускорения вследствие рысканья заднего колеса (кривизна траектории) и часть от ускорения рысканья в системе. Матрица жесткости \mathbf{K} представляет собой сумму двух матриц: не зависящей от скорости симметричной матрицы $g\mathbf{K}_0$, которая пропорциональна постоянной ускорения свободного падения и которая может быть использована для вычисления потенциальной энергии системы $\mathbf{q}^T g\mathbf{K}_0 \mathbf{q}/2$, и матрица $v^2\mathbf{K}_2$, квадратичная по скорости прямолинейного движения v и учитывающая гироскопические и центробежные эффекты. Индексы, стоящие при этих матрицах, соответствуют степеням скорости, умноженной на эти матрицы.

Уравнения (5.3) с коэффициентами, детально определяемыми в дополнении А, составляют ядро данной работы.

6. Тестовая модель и решения

Чтобы упростить сравнения с другими постановками, мы определили тестовый велосипед с параметрами, приведенными в таблице 1. Значения параметров были выбраны таким образом, чтобы минимизировать возможность неожиданного прерывания, которое может случиться, если пользоваться некорректной моделью. Кроме того, мы хотели иметь числа, которые легко описать точно. В тестовой модели велосипеда два колеса отличны по свойствам друг от друга и не имеют равных углов, масс и расстояний. Другая простейшая модель предложена в электронном дополнительном материале (см. дополнение 5).

(a) Коэффициенты линеаризованных уравнений движения

Подстановка значений параметров конструкции модели из таблицы 1 в выражения, полученные в дополнении А, приводит к следующим числовым значениям для элементов

матриц, входящих в уравнение (5.3):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 80.81722 & 2.31941332208709 \\ 2.31941332208709 & 0.29784188199686 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} -80.95 & -2.59951685249872 \\ -2.59951685249872 & -0.80329488458618 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 76.59734589573222 \\ 0 & 2.65431523794604 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 33.86641391492494 \\ -0.85035641456978 & 1.68540397397560 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Для точности тестовой модели у всех коэффициентов здесь и всюду сохранены 14 десятичных знаков (машинные нули учтены). Цифровое равенство с точностью во многих цифрах с результатами, полученными другими способами, обеспечивает уверенность в справедливости положенных в основу математических рассуждений, даже когда эту справедливость не удается установить аналитически.

(b) *Устойчивость в первом приближении, характеристические значения для сравнения*

Собственные значения характеристического уравнения не зависят от выбора обобщенных координат и формы записи уравнений движения: любая невырожденная замена переменных приводит к уравнениям с теми же собственными значениями. Таким образом, собственные значения служат удобным тестовым результатом, позволяющим сравнивать модели, полученные при помощи разных рассуждений. Собственные значения получаются, если предположить существование экспоненциального решения вида $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda t)$ для однородного уравнения ($\mathbf{f} = 0$ в уравнении (5.3)). Это приводит к характеристическому полиномиальному уравнению

$$\det(\mathbf{M}\lambda^2 + v\mathbf{C}_1\lambda + g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2) = 0, \quad (6.5)$$

которое имеет четвертый порядок по λ . После подстановки выражений из дополнения А, коэффициенты полиномиального характеристического уравнения четвертого порядка становятся сложными выражениями двадцати пяти параметров конструкции велосипеда (см. таблицу 1), постоянной g и постоянной скорости v . На рисунке 3 показаны нули λ этого характеристического многочлена для широкого набора скоростей. Характеристические значения с положительной вещественной частью соответствуют неустойчивым движениям, тогда как характеристические значения с отрицательными вещественными частями соответствуют асимптотически устойчивым движениям для данной модели. Чисто мнимые собственные значения соответствуют колебательным движениям. Как упоминалось в параграфе 4с, в силу обратимости по времени данной системы имеется очевидная симметрия в характеристическом уравнении (6.5): если (v, λ) является решением, то решение $(-v, -\lambda)$ также подходит. Это означает, что рисунок 3 является центрально симметричным относительно начала координат (см. также рис. 9 в работе [7]).

Это уравнение четвертого порядка имеет четыре различных собственных значения за исключением случаев, когда параметры специально подобраны так, что возникают кратные корни. Пара чисто мнимых (колебательных) собственных значений связана с парой особых режимов. При достаточно больших скоростях наиболее интересными с точки зрения устойчивости являются два режима, традиционно называемые режимом опрокидывания и режимом волновых движений. Режим опрокидывания соответствует действительному положительному собственному значению с собственным вектором, преобладающим в угле наклона: неустойчивый опрокидывающийся велосипед начинает постепенно наклоняться, двигаясь по закручивающейся спирали, причем наклон и поворот возрастают пропорционально до того момента, когда велосипед падает. Режим волновых движений соответствует колебательному движению, когда велосипед раскачивается синусоидально, двигаясь в переднем направлении с небольшой задержкой фазы по углу наклона. Третье собственное значение велико по модулю, действительно и отрицательно. Этот случай соответствует роликовому режиму, который вызывается углом поворота руля. В этом случае точка касания переднего колеса с плоскостью движения описывает траекторию, напоминающую траекторию преследования (трактрису), подобно тому, как выравнивается движение роликового колеса тележки для покупок в супермаркете.

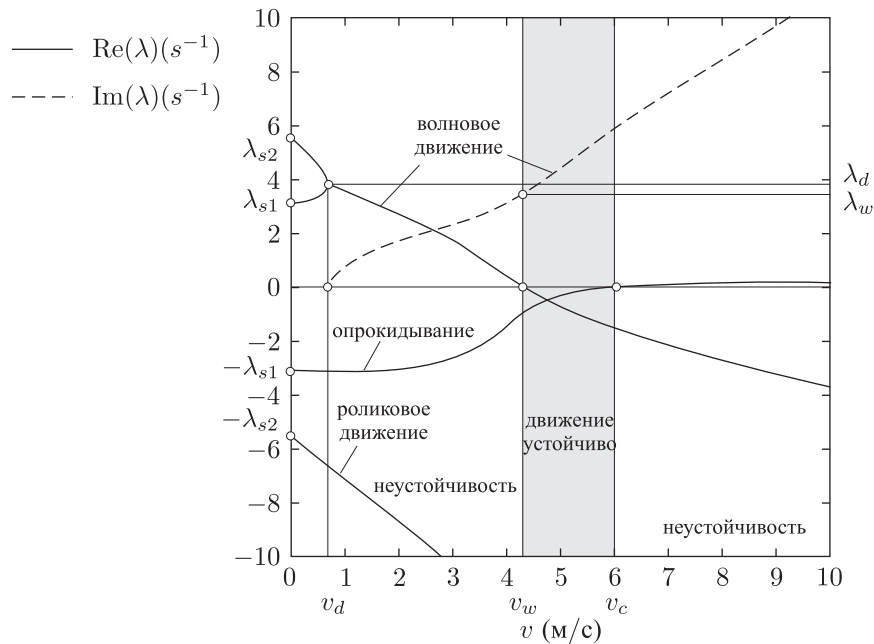


Рис. 3. Характеристические значения λ , получающиеся из линейного анализа устойчивости для тестовой модели велосипеда с параметрами, представленными на рисунке 1 и в таблице 1. Сплошные линии соответствуют действительным частям собственных значений, а пунктирные линии — мнимым частям собственных значений в диапазоне скоростей $0 \leq v \leq 10$ м/с. Диапазон скоростей, в котором прямолинейное равномерное движение вертикально расположенного неуправляемого велосипеда является устойчивым, имеет вид $v_w < v < v_c$. Действительные части характеристических значений обращаются в нуль в случае волнового движения при волновой скорости $v \approx 4.3$ м/с и для опрокидывания при $v \approx 6.0$ м/с; колебания возникают при действительном кратном корне с $v_d \approx 0.7$ м/с. Для точных данных о характеристических значениях и скоростях см. таблицу 2.

При скоростях прямолинейного движения, близких к нулю, а именно при скоростях в диапазоне $0 < v < 0.5$ м/с, характеристическое уравнение имеет две пары действительных



корней. Тем самым, каждая пара дает одно положительное и одно отрицательное собственные значения, и этот режим соответствует падению велосипеда по принципу перевернутого маятника. Каждое положительное собственное значение обеспечивает режим падения велосипеда, тогда как отрицательные собственные значения соответствуют движению, получаемому из падения обращением времени, то есть подъему. Для тестовой модели велосипеда, представленной здесь, при скорости $v_d \approx 0.7$ м/с два действительных собственных значения сливаются, а потом расщепляются, образуя пару комплексно-сопряженных значений; в этот момент возникает колебательное движение. Сначала это движение является неустойчивым, но затем при $v_w \approx 4.3$ м/с (при так называемой волновой скорости, см. [79]) этот режим становится устойчивым. Собственные значения пересекают мнимую ось, в результате чего возникает бифуркация рождения цикла (бифуркация Хопфа). При более высоких скоростях собственное значение, отвечающее режиму опрокидывания, пересекает начало координат, создавая вилкообразную бифуркацию при $v_c \approx 6.0$ м/с, скорости опрокидывания. Велосипед становится при этом неустойчивым [8]. Диапазон скоростей, в котором неуправляемый велосипед показывает асимптотически устойчивое поведение, со всеми собственными значениями, имеющими отрицательные вещественные части, имеет вид $v_w < v < v_c$. Для сравнения с будущими исследованиями в таблице 2 представлены тестовые выражения для собственных значений для различных скоростей прямолинейного движения.

7. Проверка справедливости линеаризованных уравнений движения

Линеаризованные уравнения движения, представленные здесь, то есть уравнение (5.3) с коэффициентами, полученными в дополнении А, выводились при помощи карандаша и булмага двумя способами [50, 52] и точно согласуются с некоторыми другими из уравнений, полученных ранее (по этому поводу см. § 2). Мы также проверили коэффициенты данного уравнения при помощи двух программ моделирования нелинейной динамики, описанных ниже. Кроме того, была проведена независимая проверка результатов нашей работы при помощи программы моделирования нелинейной динамики [8, 43]. Наконец, диапазон скоростей, в котором неуправляемый велосипед является устойчивым, а также изменения, происходящие с углом наклона и углом поворота руля, были измерены при экспериментах с реальным велосипедом с туго накачанными шинами. В работе [40] были измерены геометрические и инерционные характеристики данного велосипеда. Было получено хорошее согласование между экспериментально выведенными собственными значениями и собственными значениями, полученными по нашим формулам.

(а) Уравнения движения, выведенные с помощью программы Srsacg

Srsacg является программным комплексом для моделирования динамики систем многих тел. Реализация этой программы описана в работах [33, 34, 49, 68, 70, 81]. Srsacg основывается на принципах метода конечных элементов, сформулированных в работе [9]. Srsacg имеет дело с системами твердых и упругих тел, соединенных различными шарнирами и образующими как открытые, так и замкнутые кинематические цепи, при этом отдельные узлы могут иметь контакт качения. Srsacg численно генерирует и решает полные нелинейные динамические уравнения, используя минимальные координаты (то есть координаты, введенные с учетом связей). Модель велосипеда, построенная для исследования в системе Srsacg,

включает в себя твердое тело, точечные массы, шарниры и контакт качения, входящие в пакет моделирования данной программы (см. [69, 70]). Spacag может также найти численные значения для коэффициентов линеаризованных уравнений движения методом, основанным на полуаналитической линеаризации нелинейных уравнений. С помощью этой программы установлено, что полученные в ней значения элементов матриц, входящих в линеаризованные уравнения (5.3), согласуются с точностью до 14 десятичных знаков с величинами, представленными в § 6а. Для дальнейшего знакомства с программой Spacag см. электронный дополнительный материал, дополнение 2.

(b) Уравнения движения, выведенные при помощи программы символьных вычислений AutoSim.

Мы также вывели нелинейные уравнения движения, используя программу моделирования динамики систем твердых тел AutoSim v. 2.80 (см. [66, 67]). AutoSim является программой, написанной на языке Lisp и имеющей в своей основе идеи, восходящие к методу Кейна [35]. Эта программа включает в себя определения функций и структуры данных, позволяющие генерировать в символьном виде уравнения движения для системы твердых тел. AutoSim наиболее эффективно работает с системами объектов, соединенных призматическими или вращательными шарнирами и образующими систему со структурой «дерево» (то есть не содержащей кинематических цепей). AutoSim генерирует уравнения в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q}, t) \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} = [\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)]^{-1} \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t). \quad (7.1)$$

Здесь \mathbf{q} — обобщенные координаты, \mathbf{u} — обобщенные скорости, \mathbf{S} — кинематическая матрица перехода между обобщенными скоростями $\dot{\mathbf{q}}$ и \mathbf{u} , \mathbf{M} — матрица масс системы, а \mathbf{Q} содержит все обобщенные силы и все слагаемые, зависящие от скоростей. Дополнительные связи для замкнутых кинематических цепей, специальных шарниров и неголономных связей добавляются к этой системе отдельно. Например, кинематически замкнутая голономная связь, состоящая в том, что оба колеса велосипеда должны касаться опорной плоскости, не может быть легко разрешена в символьном виде для зависимых скоростей, поскольку для этого требуется решить полиномиальное уравнение четвертой степени. Для осуществления этой связи была предложена численная итерационная процедура, нарушившая чисто символьную конструкцию уравнений.

Вообще говоря, стандартная процедура линеаризации, имеющаяся в AutoSim, не применима к системам, обладающим замкнутыми цепями. Однако в нашем случае зависимый угол наклона (угол тангажа) в первом порядке равен нулю, и сложностей не возникает. Окончательные линеаризованные уравнения, полученные при помощи AutoSim исследовались в программе MATLAB, в результате чего были получены численные значения для всех элементов матриц, входящих в линеаризованные уравнения (5.3). Эти элементы с точностью до 14 десятичных знаков согласуются с теми, что представлены в § 6а. Более детальную информацию о проверке наших результатов при помощи программы AutoSim можно найти в электронном дополнительном материале, дополнение 3.

8. Сохранение энергии и асимптотическая устойчивость

Когда неуправляемый велосипед движется в диапазоне скоростей, обеспечивающих его устойчивое прямолинейное движение, то возмущения углов наклона и поворота руля затухают таким образом, как будто в системе присутствует демпфирование. Однако диссипация

Таблица 2. Некоторые характерные значения для скорости прямолинейного движения v и характеристических значений λ , вычисленных при линейном анализе устойчивости прямолинейного движения модели велосипеда с параметрами, описанными на рисунке 1, а также перечисленными в таблице 1. Для возможных сравнений с результатами других работ все вычисленные выражения взяты с точностью до 14 десятичных знаков: (а) для $v = 0$, волновая скорость v_w , скорость опрокидывания v_c и скорость, при которой имеется кратное характеристическое значение v_d . В диапазоне скоростей $0 \leq v \leq 10$ м/с вычислены (б) комплексные характеристические значения и (с) действительные характеристические значения.

(а)		
v (м/с)	λ (1/с)	
$v = 0$	$\lambda_{s1} = \pm 3.13164324790656$	
$v = 0$	$\lambda_{s2} = \pm 5.53094371765393$	
$v_d = 0.68428307889246$	$\lambda_d = 3.78290405129320$	
$v_w = 4.29238253634111$	$\lambda_w = 0 \pm 3.43503384866144i$	
$v_c = 6.02426201538837$	0	
(б)		
v м/с	$\text{Re}(\lambda_{\text{волн}})$ (1/с)	$\text{Im}(\lambda_{\text{волн}})$ (1/с)
0	—	—
1	3.52696170990070	0.80774027519930
2	2.26834517512754	1.68066296590675
3	1.70675605663975	2.31582447384325
4	0.41325331521125	3.07910818603206
5	-0.77534188219585	4.46486771378823
6	-1.52644486584142	5.87673060598709
7	-2.13875644258362	7.19525913329805
8	-2.69348683581097	8.46037971396931
9	-3.21675402252485	9.69377351531791
10	-3.72016840437287	10.90681139476287
(с)		
v м/с	$\lambda_{\text{опр}}$ (1/с)	$\lambda_{\text{рол}}$ (1/с)
0	-3.13164324790656	-5.53094371765393
1	-3.13423125066578	-7.11008014637442
2	-3.07158645641514	-8.67387984831735
3	-2.63366137253667	-10.35101467245920
4	-1.42944427361326	-12.15861426576447
5	-0.32286642900409	-14.07838969279822
6	-0.00406690076970	-16.08537123098026
7	0.10268170574766	-18.15788466125262
8	0.14327879765713	-20.27940894394569
9	0.15790184030917	-22.43788559040858
10	0.16105338653172	-24.62459635017404

энергии в системе отсутствует — энергия сохраняется. В процессе затухания возмущений энергия этих колебаний преобразуется в скорость прямолинейного движения, а не рассеивается. Так как на скорость влияют только возмущения этих углов, имеющие второй порядок малости, то линеаризованные уравнения не описывают это сохранение энергии. При помощи программы Sрасаg нами был выполнен нелинейный динамический анализ предложенной модели велосипеда с целью продемонстрировать перекачку энергии от колебательных движений по углам наклона и поворота руля в скорость прямолинейного движения. Начальные условия в момент $t = 0$ были выбраны соответствующими вертикальному положению велосипеда $(\phi, \delta, \theta_R) = (0, 0, 0)$, начальная скорость v была выбрана равной 4.6 м/с, то есть принадлежащей диапазону скоростей, обеспечивающих устойчивое движение неуправляемого велосипеда, а начальная скорость изменения угла $\dot{\phi}$ была выбрана равной 0.5 рад/с. В полных нелинейных уравнениях окончательная скорость прямолинейного движения увеличилась по сравнению с начальной скоростью на количество, определяемое энергией бокового возмущения. В нашем случае возрастание скорости составило примерно 0.022 м/с. На рисунке 4 изображено это малое возрастание скорости прямолинейного движения v , тогда как боковые возмущения исчезают, что и ожидалось. Рисунок 4 показывает также, что период колебаний по углу наклона и углу поворота руля составляет примерно 1.60 с, что хорошо согласуется со значением 1.622 с, полученным при линейном анализе устойчивости. Расхождения во второй цифре двух этих значений вызваны эффектами колебаний с конечной амплитудой, а не точностью численных расчетов. Когда начальная скорость бокового движения уменьшается в 10 раз, период колебаний совпадает с предсказанным в линейном анализе с точностью до четырех десятичных знаков. Малое отклонение руля $\dot{\delta}$ имеет небольшую задержку по фазе относительно наклона $\dot{\phi}$, видимую в решении, представленном на рисунке 4.

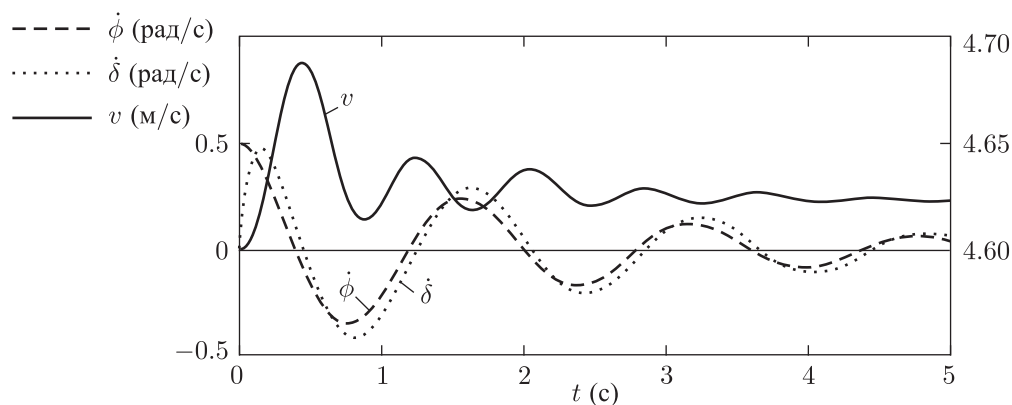


Рис. 4. Зависимости скорости $v = -\dot{\theta}_R r_R$ и скоростей $\dot{\phi}$ и $\dot{\delta}$ от времени для полных нелинейных уравнений тестовой модели велосипеда с параметрами, представленными на рисунке 1 и в таблице 1. Графики были получены численно, начальные условия при этом выбирались следующие: $(\phi, \delta, \theta_R) = (0, 0, 0,)$ и $(\dot{\phi}, \dot{\delta}, v) = (0.5 \text{ рад/с}, 0, 4.6 \text{ м/с})$. Продолжительность времени t составляет 5 секунд.

9. Обсуждения, выводы и дальнейшая работа

В данной работе мы представили проверенные уравнения хорошо описанной модели для более глубокого изучения устойчивости прямолинейного движения управляемого и неуправляемого велосипеда. Уравнения движения, имеющие вид уравнений (5.3), с коэффициента-

ми, определяемыми в дополнении А, подкреплены большим числом ссылок на предыдущие исследования и современным сравнительным моделированием, которое, как мы чувствуем, дает результаты, хорошо согласующиеся с предсказанными теоретически. Эти уравнения могут также быть использованы для проверки всеми, кто желает получить свои собственные уравнения движения велосипеда. Можно производить следующие сравнения:

1. аналитической формы коэффициентов в уравнении (5.3) с коэффициентами, определенными в дополнении А, или
2. численных значений коэффициентов в уравнении (5.3), используя как общие параметры велосипеда, указанные в дополнении 1, так и простой набор в электронном дополнительном материале, дополнение 5, или
3. численные выражения для собственных значений, или
4. диапазон скоростей, обеспечивающих устойчивое движение велосипеда для заданного набора параметров.

Эта работа подтверждает открытие Карвалло, сделанное им в 1897 году: асимптотическая устойчивость неуправляемого движения велосипеда может быть объяснена при помощи довольно сложной консервативной модели велосипеда, представляющей собой систему твердых тел. Это исследование строго отвечает на вопрос о том, почему неуправляемый велосипед все же способен осуществлять устойчивое прямолинейное движение. Ответ следует из анализа уравнений. Более простое объяснение этого эффекта кажется невозможным, поскольку угол наклона велосипеда и угол поворота руля связаны комбинацией нескольких эффектов, включая гироскопическую прецессию, боковые реакции опорной плоскости и ту особенность, что точка контакта переднего колеса с опорной плоскостью находится позади точки пересечения оси поворота руля с этой плоскостью, наличие силы тяжести и инерционные характеристики передней части рамы (в частности, то обстоятельство, что центр масс этой части не лежит на оси поворота руля). Важную роль играют также эффекты, связанные с матрицей моментов инерции передней части рамы.

Полученные нами уравнения могут служить основой для будущей работы, рассматривающей вопрос, насколько сильно те или иные параметры конструкции велосипеда влияют на устойчивость его движения. Например, мы надеемся развеять мифы о том, что для устойчивости прямолинейного движения неуправляемого велосипеда необходимы гироскопические колеса или иная стабилизирующая система.

Благодарности

Авторы учли в своей работе технические и редакторские замечания Карла Эстрема, Аниндя Чаттерджи, Эндрю Дрессела, Нейла Гетца, Ричарда Клейна, Андерса Леннартссона, Дэвида Лаймбира, Марка Псиаки, Кита Сеффена, Алессандро Саккона, Маноя Сринивасана и пяти анонимных рецензентов статьи. Клодин Пуре из Французской Академии наук обеспечила авторов информацией о премии Фурнейрона.

Дополнение А. Коэффициенты линеаризованных уравнений

Здесь мы определяем коэффициенты, входящие в уравнения (5.3). Эти коэффициенты и различные промежуточные переменные выражены через 25 конструктивных параметров

(а также через v и g), указанных в таблице 1 и на рисунке 1. Некоторые промежуточные выражения, определяемые здесь, используются также при выводе уравнений движения в дополнении В. Мы используем индекс R для заднего колеса, индекс B для задней части рамы, включая корпус велосипедиста, индекс H для передней части рамы, включая руль, F — для переднего колеса, T — для всей системы, A — для переднего узла (то есть для передней части рамы вместе с передним колесом). Полная масса и соответствующее положение центра масс (относительно точки касания P заднего колеса с опорной плоскостью) имеют следующий вид:

$$m_T = m_R + m_B + m_H + m_F, \quad (A.1)$$

$$x_T = \frac{x_B m_B + x_H m_H + w m_F}{m_T}, \quad (A.2)$$

$$z_T = \frac{-r_R m_R + z_B m_B + z_H m_H - r_F m_F}{m_T}. \quad (A.3)$$

Значимые моменты и произведения инерции относительно неподвижных осей с началом в точке P контакта заднего колеса с опорной плоскостью для всей системы в целом имеют вид

$$I_{Txx} = I_{Rxx} + I_{Bxx} + I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_R r_R^2 + m_B z_B^2 + m_H z_H^2 + m_F r_F^2, \quad (A.4)$$

$$I_{Txx} = I_{Bxx} + I_{Hxx} - m_B x_B z_B - m_H x_H z_H + m_F w r_F. \quad (A.5)$$

Моменты инерции для осесимметричного переднего и заднего колес:

$$I_{Rzz} = I_{Rxx}, \quad I_{Fzz} = I_{Fxx}. \quad (A.6)$$

Следовательно, момент инерции всего велосипеда относительно оси z можно записать как

$$I_{Tzz} = I_{Rzz} + I_{Bzz} + I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_B x_B^2 + m_H x_H^2 + m_F w^2. \quad (A.7)$$

Аналогичные свойства подобным же образом можно определить для переднего узла A:

$$m_A = m_H + m_F, \quad (A.8)$$

$$x_A = \frac{x_H m_H + w m_F}{m_A}, \quad z_A = \frac{z_H m_H - r_F m_F}{m_A}. \quad (A.9)$$

Значимые моменты и произведения инерции для переднего узла A относительно неподвижных осей с началом в центре масс переднего узла имеют вид

$$I_{Axx} = I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_H (z_H - z_A)^2 + m_F (r_F + z_A)^2, \quad (A.10)$$

$$I_{Axx} = I_{Hxx} - m_H (x_H - x_A) (z_H - z_A) + m_F (w - x_A) (r_F + z_A), \quad (A.11)$$

$$I_{Azz} = I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_H (x_H - x_A)^2 + m_F (w - x_A)^2. \quad (A.12)$$

Пусть $\lambda = (\sin \lambda, 0, \cos \lambda)^T$ — единичный вектор, направленный вниз вдоль оси поворота руля, где λ — угол в плоскости xz между осью руля, направленной вниз, и положительным направлением оси z (рис. 1). Центр масс переднего узла расположен перед осью поворота руля на расстоянии

$$u_A = (x_A - w - c) \cos \lambda - z_A \sin \lambda \quad (A.13)$$

от нее. Для описания инерционных характеристик переднего узла нам понадобятся следующие величины: момент инерции относительно оси поворота руля и произведения инерции

относительно осей, пересекающих ось поворота руля, взятые в точках, где происходит это пересечение. Эти произведения инерции определяют крутящий момент относительно одной оси за счет углового ускорения относительно другой. Например, произведение с индексом λx берется относительно точки, в которой ось поворота руля пересекает опорную плоскость. Эти произведения инерции включают в себя часть от I_A , действующую на единичных векторах вдоль поворотной оси и оси x , а также дополнительные слагаемые, возникающие за счет того, что эти оси находятся на некотором расстоянии от осей, проходящих через центр масс:

$$I_{A\lambda\lambda} = m_A u_A^2 + I_{Axx} \sin^2 \lambda + 2I_{Axz} \sin \lambda \cos \lambda + I_{Azz} \cos^2 \lambda, \quad (A.14)$$

$$I_{A\lambda x} = -m_A u_A z_A + I_{Axx} \sin \lambda + I_{Axz} \cos \lambda, \quad (A.15)$$

$$I_{A\lambda z} = m_A u_A x_A + I_{Axz} \sin \lambda + I_{Azz} \cos \lambda. \quad (A.16)$$

Отношение механического выноса (то есть расстояния от оси поворота руля до точки соприкосновения переднего колеса с плоскостью движения) к базе колес равно

$$\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda. \quad (A.17)$$

Кинетические моменты переднего и заднего колеса относительно оси y , отнесенные к скорости v прямолинейного движения, вместе с их суммой образуют гиростатические коэффициенты:

$$S_R = \frac{I_{Ryy}}{r_R}, \quad S_F = \frac{I_{Fyy}}{r_F}, \quad S_T = S_R + S_F. \quad (A.18)$$

Определим также часто возникающий статический момент по формуле

$$S_A = m_A u_A + \mu m_T x_T. \quad (A.19)$$

Теперь мы можем найти все элементы матриц, входящих в уравнения движения. Моменты инерции

$$\begin{aligned} M_{\phi\phi} &= I_{Txx}, & M_{\phi\delta} &= I_{A\lambda x} + \mu I_{Txx}, \\ M_{\delta\phi} &= M_{\phi\delta}, & M_{\delta\delta} &= I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz} \end{aligned} \quad (A.20)$$

являются элементами симметричной матрицы масс

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{\phi\phi} & M_{\phi\delta} \\ M_{\delta\phi} & M_{\delta\delta} \end{bmatrix}. \quad (A.21)$$

Зависящие от g (то есть умножаемые на g) коэффициенты матрицы жесткости \mathbf{K}_0 имеют вид

$$\begin{aligned} K_{0\phi\phi} &= m_T z_T, & K_{0\phi\delta} &= -S_A, \\ K_{0\delta\phi} &= K_{0\phi\delta}, & K_{0\delta\delta} &= -S_A \sin \lambda, \end{aligned} \quad (A.22)$$

и, тем самым, матрица \mathbf{K}_0 может быть представлена как

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} K_{0\phi\phi} & K_{0\phi\delta} \\ K_{0\delta\phi} & K_{0\delta\delta} \end{bmatrix}. \quad (A.23)$$

Зависящие от скорости члены матрицы жесткости (то есть умножаемые на v^2) имеют вид

$$\begin{aligned} K_{2\phi\phi} &= 0, & K_{2\phi\delta} &= \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda, \\ K_{2\delta\phi} &= 0, & K_{2\delta\delta} &= \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda \end{aligned} \quad (A.24)$$

и образуют матрицу жесткости

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_{2\phi\phi} & K_{2\phi\delta} \\ K_{2\delta\phi} & K_{2\delta\delta} \end{bmatrix}. \quad (A.25)$$

В линеаризованных уравнениях движения мы используем матрицу $\mathbf{K} = g\mathbf{K}_0 + v^2\mathbf{K}_2$. Наконец, «демпфирующие» члены имеют вид

$$\begin{aligned} C_{1\phi\phi} &= 0, & C_{1\phi\delta} &= \mu S_T + S_F \cos \lambda + \frac{I_{Txz}}{w} \cos \lambda - \mu m_T z_T, \\ C_{1\delta\phi} &= -(\mu S_T + S_F \cos \lambda), & C_{1\delta\delta} &= \frac{I_{A\lambda z}}{w} \cos \lambda + \mu \left(S_A + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda \right) \end{aligned} \quad (A.26)$$

и образуют матрицу

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{1\phi\phi} & C_{1\phi\delta} \\ C_{1\delta\phi} & C_{1\delta\delta} \end{bmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{C} = v\mathbf{C}_1. \quad (A.27)$$

Дополнение В. Получение линеаризованных уравнений движения

Описанный ниже способ быстрого получения линеаризованных уравнений движения основан на работе [52]. Все способы получения этих уравнений, известные до сих пор, включая и рассматриваемый, используют специальные допущения при линеаризации, в отличие от линеаризации полных нелинейных уравнений. Никто не способен линеаризовать неявные¹ нелинейные уравнения в явной форме ни вручную, ни методами компьютерной алгебры.

Для велосипеда, свободно катящегося по опорной плоскости и слабо возмущенного от своего равномерного и прямолинейного движения в вертикальной плоскости, мы хотим найти линейные уравнения движения, определяющие изменения двух боковых степеней свободы: угла наклона вправо ϕ задней части рамы и правый поворот руля δ . Линеаризованное уравнение, описывающее прямолинейное движение, определяется простой плоской механикой и имеет вид (5.2).

Мы будем считать, что велосипед движется около и примерно параллельно оси x неподвижной системы координат. Линейная динамика велосипеда в окрестности прямолинейного равномерного движения в вертикальной плоскости определяется переменными y , ψ , ϕ и δ . В этом выводе уравнений мы будем предполагать, что не только ϕ и δ , но также

¹Неявные потому, что не имеется достаточно простого выражения для кинематической цепи, выраженного в замкнутой форме.



и $\dot{y}_P/v \approx \psi$ являются малыми, так что только первые члены разложения в ряд этих уравнений должны быть сохранены.

Силы, важные в исследовании линеаризованных уравнений динамики, суть следующие: силы тяжести, приложенные в центре масс каждой из частей, составляющих велосипед, и направленные вдоль положительного направления оси z ; вертикальная сила реакции переднего колеса $-m_T g x_T/w$; горизонтальная сила реакции переднего колеса F_{Fy} , примерно направленная вдоль неподвижной оси y ; наклоняющий момент $T_{B\phi}$, приложенный к задней части рамы и стремящийся наклонить велосипед вправо относительно оси, соединяющей точки контакта колес с опорной плоскостью; момент пары $T_{H\delta}$, имеющий положительное направление вдоль оси поворота руля, так что он поворачивает руль вправо, и имеющий отрицательное направление относительно задней части рамы.

С самого начала мы заменим неголономные связи, выражающие условие качения без проскальзывания, неизвестными подлежащими определению горизонтальными силами реакции в точках соприкосновения колес с плоскостью, направленными перпендикулярно плоскости колес. Закон изменения суммарного кинетического момента относительно некоторой фиксированной оси с единичным вектором \mathbf{u} может быть записан в виде

$$\sum_{i \in \{\text{все тела}\}} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i m_i + \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i)] \cdot \mathbf{u} = \sum_{j \in \{\text{приложенным силам}\}} [\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j] \cdot \mathbf{u}.$$

Левая часть данного равенства выражает изменение суммарного кинетического момента относительно данной оси. Правая часть выражает момент внешних сил (тяжести, нагрузки и реакции наклонной плоскости). Радиусы векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j точек, в которых приложены силы \mathbf{F}_j , рассматриваются относительно любой точки, принадлежащей этой оси. Угловые скорости, угловые ускорения и ускорения $\boldsymbol{\omega}_i$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ и \mathbf{a}_i выражены с помощью первых и вторых производных боковых перемещений, наклона, рысканья и поворота.

Уравнения кинетического момента относительно оси наклона велосипеда, то есть фиксированной в опорной плоскости оси, мгновенно совпадающей с линией, по которой задняя часть рамы пересекает опорную плоскость (заметим, что эта линия не обязательно проходит через точку касания переднего колеса с плоскостью), имеет вид

$$\begin{aligned} & -m_T \ddot{y}_P z_T + I_{Txx} \ddot{\phi} + I_{Tzz} \ddot{\psi} + I_{A\lambda x} \ddot{\delta} + \dot{\psi} v S_T + \dot{\delta} v S_F \cos \lambda = \\ & = T_{B\phi} - g m_T z_T \phi + g S_A \delta. \end{aligned} \quad (B.1)$$

В дополнение к приложенному моменту $T_{B\phi}$, правая часть этого уравнения содержит наклоняющий момент сил тяжести за счет бокового наклона и вызванного поворотом руля бокового перемещения частей велосипеда, а также бокового смещения вертикальной силы реакции, приложенной в точке касания переднего колеса с опорной плоскостью. Далее, закон изменения кинетического момента всего велосипеда в проекции на фиксированную вертикальную ось, мгновенно проходящую через точку касания заднего колеса с опорной плоскостью, дает

$$m_T \ddot{y}_P x_T + I_{Txx} \ddot{\phi} + I_{Tzz} \ddot{\psi} + I_{A\lambda z} \ddot{\delta} - \dot{\phi} v S_T - \dot{\delta} v S_F \sin \lambda = w F_{Fy}. \quad (B.2)$$

Единственный внешний момент рысканья возникает от боковой силы реакции в точке контакта переднего колеса. Эту силу требуется исключить из уравнений движения. Наконец, закон изменения кинетического момента относительно оси, мгновенно совпадающей

с направлением оси поворота руля, дает

$$\begin{aligned} m_A \ddot{y}_{P u_A} + I_{A \lambda x} \ddot{\phi} + I_{A \lambda z} \ddot{\psi} + I_{A \lambda \lambda} \ddot{\delta} + v S_F \left(-\dot{\phi} \cos \lambda + \dot{\psi} \sin \lambda \right) = \\ = T_{H \delta} - c F_{F y} \cos \lambda + g (\phi + \delta \sin \lambda) S_A. \end{aligned} \quad (B.3)$$

Помимо момента $T_{H \delta}$, в правую часть этого уравнения входят моменты от боковой (подлежащей определению) силы реакции и от вертикальных сил (направленной вниз силы тяжести и направленной вверх силы реакции опорной плоскости), в проекции на переднюю часть рамы, наклоненную под углом $\phi + \delta \sin \lambda$. Комбинируя уравнения (B.2) и (B.3), мы можем исключить из уравнений неизвестную силу реакции $F_{F y}$, в результате чего останутся два уравнения. Затем, используя связи, выражающие отсутствие проскальзывания (они приведены ниже), мы можем исключить из этих уравнений ψ и y_P , а также их производные по времени, оставляя в качестве неизвестных только угол наклона ϕ , угол поворота δ и их производные по времени.

Каждая связь выражает скорость изменения бокового положения в зависимости от скорости v и рысканья ψ . Для заднего колеса имеем

$$\dot{y}_P = v \psi. \quad (B.4)$$

Аналогично для второго колеса, для которого $y_Q = y_P + w \psi - c \delta \cos \lambda$, и направление передней части рамы определяется углом рысканья задней части рамы, дополненным истинным (относительно опорной плоскости) углом поворота:

$$\frac{d(y_P + w \psi - c \delta \cos \lambda)}{dt} = v (\psi + \delta \cos \lambda). \quad (B.5)$$

Вычтем уравнение (B.4) из уравнения (B.5), получим выражение для $\dot{\psi}$ через δ и $\dot{\delta}$ и, дифференцируя его, находим

$$\dot{\psi} = \frac{v \delta + c \dot{\delta}}{w} \cos \lambda \Rightarrow \ddot{\psi} = \frac{v \dot{\delta} + c \ddot{\delta}}{w} \cos \lambda. \quad (B.6)$$

Наконец, дифференцируя уравнение (B.4) и используя (B.6), получим выражение для \ddot{y}_P :

$$\ddot{y}_P = \frac{v^2 \delta + v c \dot{\delta}}{w} \cos \lambda. \quad (B.7)$$

Подставляя соотношения (B.6) и (B.7) в уравнение (B.1), мы получим уравнение, у которого в левой части стоят выражения, зависящие от ϕ , $\ddot{\phi}$ и δ , $\dot{\delta}$ и $\ddot{\delta}$, а в правой части $T_{B \phi}$. Это уравнение называется уравнением наклона. Исключая $F_{F y}$ из (B.2) и (B.3) и снова пользуясь соотношениями (B.6) и (B.7), мы получим другое выражение, зависящее от ϕ , δ и их производных: правая часть будет содержать момент $T_{H \delta}$. Это уравнение называется уравнением поворота. Именно два эти уравнения — наклона и поворота — составляют одно матричное уравнение (5.3).

Заметим, что из общих принципов динамики нам известно, что силовые компоненты могут быть определены из принципа виртуальной работы. Таким образом, мы можем предполагать, что моменты, используемые в этих уравнениях, могут быть заменены другими,

определяемыми из принципа виртуальной работы (5.1). Поэтому всюду, где в этих уравнениях стоят моменты $T_{B\phi}$ и $T_{H\delta}$, они могут быть заменены приложенными обобщенными силами T_ϕ и T_δ .

Так как ψ и y_P не появляются в окончательных уравнениях, то велосипеду не обязательно иметь какую-то определенную ориентацию относительно неподвижной системы отсчета, введенной на рисунке 2. Таким образом, x , y и ψ могут быть сколь угодно большими и велосипед может находиться в любом положении и с произвольной ориентацией на неподвижной плоскости. С целью численного моделирования и визуализации движения мы вычисляли циклические координаты x_P , y_P и ψ численным интегрированием. В качестве уравнения для ψ мы брали первое из уравнений (B.6). Что же касается производных \dot{x}_P и \dot{y}_P , то они описываются уравнениями

$$\dot{x}_P = v \cos \psi, \quad \dot{y}_P = v \sin \psi. \quad (B.8)$$

Заметим, то для \dot{y}_P выбрана формула, соответствующая конечному углу ψ , в противоположность формуле (B.4), справедливой для малых углов и использовавшейся при выводе уравнений движения. (Эта ситуация отчасти аналогична, скажем, классической задаче об эластике Эйлера, в которой перемещения и углы, используемые при вычислении деформаций, являются малыми, но, тем не менее, перемещения и углы элаستيку в целом могут быть произвольно большими.)

Промежуточные результаты этого добавления могут быть использованы для вычисления горизонтальных боковых сил реакции. Уравнение (B.2) определяет горизонтальную боковую силу реакции переднего колеса с опорной плоскостью. Если добавить к нему закон изменения импульса в проекции на ось y , выраженный через \ddot{y}_P , $\ddot{\phi}$, $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\delta}$, то можно определить и горизонтальную силу реакции заднего колеса с опорной плоскостью.

Список литературы

- [1] Аппель П. Теоретическая механика: Т. 2. Москва: Физматгиз, 1960. 487 с. [Appell P. *Traité de mécanique rationnelle*: Т. 2. Dynamique du point. Paris: Gauthier, 1896. 538 pp.]
- [2] Дикарев Е. Д., Дикарева С. Б., Фуфаев Н. А. Влияние наклона рулевой оси и выноса переднего колеса на устойчивость движения велосипеда // МТТ, 1981, № 1, с. 69–73.
- [3] Джоунс Д. Почему устойчив велосипед? // Квант, 1970, № 12, с. 24–30. [Jones D. E. H. The stability of the bicycle // *Phys. Today*, 1970, vol. 23, no. 4, pp. 34–40.]
- [4] Лобас Л. Г. Об управляемом и программном движениях бицикла по плоскости // МТТ, 1978, № 6, с. 22–28.
- [5] Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика: В 3 тт. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1932–1934. 307 с.; 452 с.; 624 с.
- [6] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, Физматлит, 1967. 520 с.
- [7] Åström K. J., Klein R. E., Lennartsson A. Bicycle dynamics and control, adapted bicycles for education and research // *IEEE Control Syst. Mag.*, 2005, vol. 25, no. 4, pp. 26–47.
- [8] Basu-Mandal P., Chatterjee A., Papadopoulos J. M. Hands-free circular motions of a benchmark bicycle // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2007, vol. 463, no. 2084, pp. 1983–2003.
- [9] Besseling J. F. The complete analogy between the matrix equations and the continuous field equations of structural analysis // *Proc. of the Internat. Symp. on Analogue and Digital Techniques Applied to Aeronautics*. Bruxelles: Presses Académiques Européennes, 1964. P. 223–242.
- [10] Bouasse H. *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*: P. 2. Paris: Delagrave, 1910. P. 620–625.



- [11] Bourlet C. Étude théorique sur la bicyclette: 1, 2 // Bull. Soc. Math. France, 1899, vol. 27, pp. 47–67, 76–96.²
- [12] Boussinesq J. Aperçu sur la théorie de la bicyclette // J. Math. Pure Appl., 1899, vol. 5, pp. 117–135.
- [13] Boussinesq J. Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette: influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du cavalier // J. Math. Pure Appl., 1899, vol. 5, pp. 217–232.
- [14] Bower G. S. Steering and stability of single-track vehicles // Automob. Eng., 1915, vol. 5, pp. 280–283.
- [15] Carvallo E. Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette. Paris: Gauthier-Villars, 1899.³
- [16] Collins R. N. A mathematical analysis of the stability of two wheeled vehicles: PhD thesis. Department of Mechanical Engineering, University of Wisconsin, Madison, 1963.
- [17] Cox A. J. Angular momentum and motorcycle counter-steering: A discussion and demonstration // Amer. J. Phys., 1998, vol. 66, no. 11, pp. 1018–1020.
- [18] Den Hartog J. P. Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1948. 462 pp.
- [19] Döhring E. Über die Stabilität und die Lenkkräfte von Einspurfahrzeugen: PhD thesis. University of Technology, Braunschweig, 1953.
- [20] Döhring E. Die Stabilität von Einspurfahrzeugen // Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1955, vol. 21, no. 2, pp. 50–62.
- [21] Eaton D. J. Man-machine dynamics in the stabilization of single-track vehicles: PhD thesis. University of Michigan, Ann Arbor, 1973.
- [22] Fajans J. Steering in bicycles and motorcycles // Amer. J. Phys., 2000, vol. 68, no. 7, pp. 654–659.
- [23] Franke G., Suhr W., Rie F. An advanced model of bicycle dynamics // European J. Phys., 1990, vol. 11, no. 2, pp. 116–121.
- [24] Ge Z.-M. Kinematical and dynamic studies of a bicycle. Beijing: Shanghai Chiao Tung Univ., 1966.
- [25] Getz N. H., Marsden J. E. Control for an autonomous bicycle // IEEE Conf. on Robotics and Automation (Nagoya, Japan, 21–27 May 1995). 6 pp.
- [26] Haag J. Les mouvements vibratoire: Vol. 2. Paris: PUF, 1955. 253 pp. (См. также: Haag J. Oscillatory motions: In 2 Vols. Belmont, CA: Wadsworth, 1962. 201 pp.)
- [27] Hand R. S. Comparisons and stability analysis of linearized equations of motion for a basic bicycle model: MSc thesis. Cornell University, Ithaca, NY, 1988.
- [28] Herfkens B. D. De stabiliteit van het rijwiel. Report S-98-247-50-10-'49, Instituut voor rijwielontwikkeling, 's-Gravenhage, 1949.
- [29] Herlihy D. V. Bicycle: The history. New Haven, CT: Yale Univ. Press, 2004. 480 pp.
- [30] Higbie J. The motorcycle as a gyroscope // Amer. J. Phys., 1974, vol. 42, no. 8, pp. 701–702.
- [31] Hubbard M. Lateral dynamics and stability of the skateboard // Trans. ASME J. Appl. Mech., vol. 46, pp. 931–936.
- [32] Jones A. T. Physics and bicycles // Amer. J. Phys., 1942, vol. 10, pp. 332–333.
- [33] Jonker J. B. A finite element dynamic analysis of flexible spatial mechanisms and manipulators: PhD thesis. Delft University of Technology, Delft, 1988.
- [34] Jonker J. B., Meijaard J. P. SPACAR — computer program for dynamic analysis of flexible spatial mechanisms and manipulators // Multibody systems handbook / W. Schiehlen (Ed.). Berlin: Springer, 1990. P. 123–143.
- [35] Kane T. R. Dynamics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968. 310 pp.
- [36] Kirshner D. Some nonexplanations of bicycle stability // Amer. J. Phys., 1980, vol. 48, no. 1, pp. 36–38.

²Работа представлена в 1897 году на соискание премии Фурнейрона и получила первую премию в 1898 году.

³Работа представлена в 1897 году на соискание премии Фурнейрона и получила первую премию в 1898 году.

- [37] Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels: Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. Leipzig: Teubner, 1910. P. 863–884.
- [38] Koenen C. The dynamic behaviour of a motorcycle when running straight ahead and when cornering: PhD thesis. Delft University of Technology, Delft, 1983.
- [39] Kondo M., Nagaoka A., Yoshimura F. Theoretical study on the running stability of the two-wheelers // Trans. Soc. Automot. Eng. Jpn., 1963, vol. 17, pp. 8–18.
- [40] Kooijman J.D.G., Schwab A.L., Meijaard J.P. Experimental validation of a model of an uncontrolled bicycle // Multibody Syst. Dyn., 2008, vol. 19, pp. 115–132.
- [41] Lallement P. Improvement in velocipedes. U.S. Patent 59915. 1866.
- [42] Le Henaff Y. Dynamical stability of the bicycle // European J. Phys., 1987, vol. 8, no. 3, pp. 207–210.
- [43] Lennartsson A. Efficient multibody dynamics: PhD thesis. Royal Institute of Technology, Stockholm, 1999.
- [44] Limebeer D. J. N., Sharp R. S. Bicycles, motorcycles, and models // IEEE Control Syst. Mag., 2006, vol. 26, no. 5, pp. 34–61.
- [45] Lowell J., McKell H. D. The stability of bicycles // Amer. J. Phys., 1982, vol. 50, no. 12, pp. 1106–1112.
- [46] Manning J. R. The dynamical stability of bicycles. Report RN/1605/JRM, 1951. Department of Scientific and Industrial Research, Road Research Laboratory, Crowthorne, Berkshire, UK.
- [47] Maunsell F. G. Why does a bicycle keep upright? // Math. Gaz., 1946, vol. 30, pp. 195–199.
- [48] Mears B. C. Open loop aspects of two wheeled vehicle stability characteristics: PhD thesis. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1988.
- [49] Meijaard J. P. Direct determination of periodic solutions of the dynamical equations of flexible mechanisms and manipulators // Int. J. Numer. Methods Eng., 1991, vol. 32, no. 8, pp. 1691–1710.
- [50] Meijaard J. P. Derivation of the linearized equations for an uncontrolled bicycle: Internal report. University of Nottingham, UK, 2004.
- [51] Olsen J., Papadopoulos J. M. Bicycle dynamics: The meaning behind the math // Bike Tech., 1988, vol. 7, no. 6, pp. 13–15.
- [52] Papadopoulos J. M. Bicycle steering dynamics and self-stability: A summary report on work in progress: Technical report. Cornell Bicycle Research Project, Cornell University, Ithaca, NY, 1987.
- [53] Patterson B. The chronicles of the lords of the chainring. Santa Maria, CA: Patterson, 1998. 131 pp.
- [54] Pearsall R. H. The stability of a bicycle // Proc. Inst. Automob. Eng., 1922, vol. 17, pp. 395–404.
- [55] Psiaki M. L. Bicycle stability: A mathematical and numerical analysis: BA thesis. Physics Department, Princeton University, NJ, 1979.
- [56] Rankine W. J. M. On the dynamical principles of the motion of velocipedes // Engineer, 1869, vol. 28, pp. 79, 129, 153, 175; 1870, vol. 29, p. 2.
- [57] Rice R. S. Bicycle dynamics, simplified steady state response characteristics and stability indices. Report ZN-5431-V-1, Calspan, Buffalo, NY, June, 1974.
- [58] Rice R. S. Bicycle dynamics-simplified dynamic stability analysis. Report ZN-5921-V-2, Calspan, Buffalo, NY, September, 1976.
- [59] Rice R. S., Roland R. D. An evaluation of the performance and handling qualities of bicycles. Report VJ-2888-K, Calspan, Buffalo, NY, April, 1970.
- [60] Roland R. D. Computer simulation of bicycle dynamics // Mechanics and sport (AMD-4) / J. L. Bleustein (Ed.). New York: American Society of Mechanical Engineers, 1973. P. 35–83.
- [61] Roland R. D., Lynch J. P. Bicycle dynamics tire characteristics and rider modeling. Report YA-3063-K-2, Calspan, Buffalo, NY, March, 1972.
- [62] Roland R. D., Massing D. E. A digital computer simulation of bicycle dynamics. Report YA-3063-K-1, Calspan, Buffalo, NY, June, 1971.
- [63] Routh G. R. R. On the motion of a bicycle // Messenger Math., 1899, vol. 28, pp. 151–169.

- [64] Ruina A. Non-holonomic stability aspects of piecewise holonomic systems // *Rep. Math. Phys.*, 1998, vol. 42, pp. 91–100.
- [65] SAE (Society of Automotive Engineers): Vehicle dynamics terminology // *Proc. SAE J670e: 2001 SAE handbook*. Warrendale, PA: SAE International, 2001.
- [66] Sayers M. W. Symbolic computer language for multibody systems // *J. Guid. Control Dyn.*, 1991, vol. 14, pp. 1153–1163.
- [67] Sayers M. W. Symbolic vector/dyadic multibody formalism for tree-topology systems // *J. Guid. Control Dyn.*, 1991, vol. 14, pp. 1240–1250.
- [68] Schwab A. L. Dynamics of flexible multibody systems: PhD thesis. Delft University of Technology, Delft, 2002.
- [69] Schwab A. L., Meijaard J. P. Dynamics of flexible multibody systems having rolling contact: Application of the wheel element to the dynamics of road vehicles // *Vehicle Syst. Dyn. Suppl.*, 1999, vol. 33, pp. 338–349.
- [70] Schwab A. L., Meijaard J. P. Dynamics of flexible multibody systems with non-holonomic constraints: A finite element approach // *Multibody Syst. Dyn.*, 2003, vol. 10, pp. 107–123.
- [71] Schwab A. L., Meijaard J. P., Papadopoulos J. M. Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle // *KSME J. Mech. Sci. Technol.*, 2005, vol. 19, pp. 292–304.
- [72] Sharp A. Bicycles and tricycles: An elementary treatise on their design and construction. London: Longmans, Green and Co., 1896. 530 pp. (Reissued by MIT Press, 1979.)
- [73] Sharp R. S. The stability and control of motorcycles // *J. Mech. Eng. Sci.*, 1971, vol. 13, pp. 316–329.
- [74] Sharp R. S. The lateral dynamics of motorcycles and bicycles // *Vehicle Syst. Dyn.*, 1985, vol. 14, pp. 265–283.
- [75] Singh D. V. Advanced concepts of the stability of two-wheeled vehicles — application of mathematical analysis to actual vehicles: PhD thesis. Department of Mechanical Engineering, University of Wisconsin, Madison, 1964.
- [76] Singh D. V., Goel V. K. Stability of Rajdoot scooter. SAE paper 710273. New York: Society of Automotive Engineers, 1971.
- [77] Singh D. V., Goel V. K. Stability of single track vehicles // *Proc. IUTAM Symp. «The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks»* (Delft, The Netherlands, 18–22 August 1975) / H. B. Pacejka (Ed.). Amsterdam: Swets and Zeitlinger, 1976. P. 187–196.
- [78] Steele G. L. Common LISP the language. 2nd ed. Woburn, MA: Digital Press, 1990. 1029 pp.
- [79] Strogatz S. H. Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Cambridge, MA: Perseus Books, 1994. 512 pp.
- [80] Timoshenko S., Young D. H. Advanced dynamics. New York: McGraw-Hill, 1948. 400 pp.
- [81] Van der Werff K. Kinematic and dynamic analysis of mechanisms, a finite element approach: PhD thesis. Delft University of Technology, Delft, 1977.
- [82] Van Zytveld P. J. A method for the automatic stabilization of an unmanned bicycle: Engineer's thesis. Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, CA, 1975.
- [83] Wallace J. The super-sports motor cycle (with an appendix on steering layout) // *Proc. Inst. Automob. Eng.*, 1929, vol. 24, pp. 161–231.
- [84] Weir D. H. Motorcycle handling dynamics and rider control and the effect of design configuration on response and performance: PhD thesis. University of California at Los Angeles, CA, 1972.
- [85] Weir D. H., Zellner J. W. Lateral-directional motorcycle dynamics and rider control // *Motorcycle dynamics and rider control: Congress and exposition* (Detroit, MI, February 27–March 3, 1978), SAE paper 780304 (SP 428). Warrendale, PA: Society of Automotive Engineers. P. 7–31.
- [86] Whipple F. J. W. The stability of the motion of a bicycle // *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1899, vol. 30, pp. 312–348.
- [87] Wilson D. G. Bicycling science. 3rd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2004. 485 pp.

Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review

J. P. Meijaard¹, Jim M. Papadopoulos², Andy Ruina³, A. L. Schwab⁴

¹School of MMME, The University of Nottingham, University Park, Nottingham NG7 2RD, UK

²2802 West Carrera Court, Green Bay, WI 54311, USA

³Department of Mechanics, Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA

⁴Laboratory for Engineering Mechanics, Delft University of Technology, Mekelweg 2, 2628 CD Delft, The Netherlands

We present canonical linearized equations of motion for the Whipple bicycle model consisting of four rigid laterally symmetric ideally hinged parts: two wheels, a frame and a front assembly. The wheels are also axisymmetric and make ideal knife-edge rolling point contact with the ground level. The mass distribution and geometry are otherwise arbitrary. This conservative non-holonomic system has a seven-dimensional accessible configuration space and three velocity degrees of freedom parametrized by rates of frame lean, steer angle and rear wheel rotation. We construct the terms in the governing equations methodically for easy implementation. The equations are suitable for e.g. the study of bicycle self-stability. We derived these equations by hand in two ways and also checked them against two nonlinear dynamics simulations. In the century-old literature, several sets of equations fully agree with those here and several do not. Two benchmarks provide test cases for checking alternative formulations of the equations of motion or alternative numerical solutions. Further, the results here can also serve as a check for general purpose dynamic programs. For the benchmark bicycles, we accurately calculate the eigenvalues (the roots of the characteristic equation) and the speeds at which bicycle lean and steer are self-stable, confirming the century-old result that this conservative system can have asymptotic stability.

Keywords: bicycle, motorcycle, dynamics, linear, stability, non-holonomic

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 343–376 (Russian)

Originally published in: *Proc. R. Soc. A*, 2007, vol. 463, pp. 1955–1982 © 2007 The Royal Society.

